Solution de la question de cours 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Analyse. Supposons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x).$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) + f(-x) = 2g(x) \quad \text{et} \quad f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Au final, on a les égalités

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Synthèse. Il s'agit de vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

C'est évident.

Solution de la question de cours 2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ s'écrive p/q avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$. Alors $p^2 = 2q^2$. Ainsi $2 \mid p^2$ et donc $2 \mid p$. Il s'en suit que $4 \mid p^2$. Il faut donc que q^2 soit lui aussi divisible par 2. Au final, $2 \mid q$. Et donc $2 \mid \operatorname{pgcd}(p, q) = 1$, ce qui est absurde.
Alternativement. On commence de même en supposant par l'absurde que $\sqrt{2} = p/q$. De l'égalité $p^2 = 2q^2$, on tire $p \mid (2q)q$. Le lemme de Gauss assure alors $p \mid 2q$. Réappliquant le lemme de Gauss, on a $p \mid 2$. Ainsi $p = 1$ ou $p = 2$: dans le premier cas $2q^2 = 1$ est absurde ; dans le deuxième cas il vient $q^2 = 2$ qui est absurde également.

Solution 1.

(i) On suppose $g \circ f$ injective. On veut montrer que f l'est également. Soient $x, y \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = f(y)$. Composant par g, on a $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, ce qui, par injectivité de $g \circ f$, donne $x = y$.

(ii) On suppose $g \circ f$ surjective. On veut montrer que g l'est également. Un élément $y \in \mathrm{G}$ s'écrit $(g \circ f)(x)$ pour un $x \in \mathrm{E}$ par surjectivité de $(g \circ f)$. Réécrivons-le comme $y = g(f(x))$, ce qui montre que g est surjective.

Solution 2.

(i) On procède par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons d'abord f injective. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ un élément arbitraire. Comme f est injective, pour tout $y \in f(\mathrm{E})$, il existe un unique $x_y \in \mathrm{E}$ tel que $f(x_y) = y$. On pose alors $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ la fonction définie par

$$g(y) = \begin{cases} x_y & \text{si } y \in f(\mathrm{E}), \\ x_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ satisfaisant $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Alors pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, si $f(x) = f(y)$, en prenant l'image par g, on trouve

$$x = g(f(x)) = g(f(y)) = y.$$

(ii) On procède par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons que f est surjective. On construit alors $g\colon \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ de la façon suivante : pour tout $y \in \mathrm{F}$, $f^{-1}(y)$ étant non vide, on peut y choisir un élément qu'on note $g(y)$. L'application g ainsi construite respecte $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$ par construction.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe $g\colon \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$. Alors tout $y \in \mathrm{F}$ s'écrit

$$y = (f \circ g)(y) = f(g(y)).$$

Ainsi, f est une bijection si et seulement si il existe $g, g'\colon \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telles que $g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $f \circ g' = \mathrm{id}_\mathrm{F}$. Il reste seulement à montrer que dans ce cas $g = g'$. C'est immédiat :

$$g = g \circ \mathrm{id}_\mathrm{F} = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{id}_\mathrm{E} \circ g' = g'.$$

Bonus : on a utilisé l'hypothèse $\mathrm{E} \neq \emptyset$ pour choisir $x_0 \in \mathrm{E}$ dans (i). Cette hypothèse est nécessaire : en effet, pour un ensemble non vide F, l'inclusion $\emptyset \to \mathrm{F}$ est clairement injective mais il n'existe pourtant aucune application $\mathrm{F} \to \emptyset$.

Solution 3.

1. (i) Soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. En réécrivant l'équation comme $g(f(x)) = g(f(y))$, l'injectivité de g donne $f(x) = f(y)$. Il suffit alors d'appliquer l'injectivité de f pour conclure : $x = y$.
   (ii) Soit $z \in \mathrm{G}$. Par surjectivité de g, on sait qu'il existe un élément $y \in \mathrm{F}$ tel que $z = g(y)$. La surjectivité de f assure qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, on a $z = (g \circ f)(x)$, ce qui montre la surjectivité de $g \circ f$.
2. (i) Si f est injective, alors il en va de même de $f \circ f$ par 1.(i). Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on tire de l'équation $(f \circ f)(f(x)) = (f \circ f)(x)$ l'égalité $f(x) = x$.
   (ii) Si f est surjective, alors il en va de même de $f \circ f$ par 1.(ii). Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = (f \circ f)(y)$. En prenant l'image par f de la dernière équation, on a :

$$f(x) = f((f \circ f)(y)) = (f \circ f \circ f)(y) = (f \circ f)(y) = x.$$

Remarque : on peut également résoudre l'exercice grâce aux résulats de l'exercice 2.

Solution 4.

(i) On procède par double implication.
($\Rightarrow$) On suppose f injective et on cherche à montrer que $f^{-1} \circ f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}$. C'est-à-dire que pour tout $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$, on cherche à montrer que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$. On va procéder par double inclusion. Soit $\mathrm{A} \in\subseteq \mathrm{E}$. Pour tout $a \in \mathrm{A}$, il est clair que $f(a) \in f(\mathrm{A})$, donc $a \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$; ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{A} \subseteq f^{-1}(f(\mathrm{A}))$. Pour $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$, on a $f(x) \in f(\mathrm{A})$, ce qui assure un $a \in \mathrm{A}$ tel que $f(x) = f(a)$; l'injectivité de f conclut que $x = a$, en particulier $x \in \mathrm{A}$; ce qui montre l'inclusion $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \subseteq \mathrm{A}$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose $f^{-1} \circ f_* = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}$ et on cherche à montrer que f est injective. Soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$\{x\} = (f^{-1} \circ f_*)(\{x\}) = f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(\{f(y)\}) = (f^{-1} \circ f_*)(\{y\}) = \{y\}$$

(ii) On procède par double implication.
($\Rightarrow$) On suppose f surjective et on cherche à montrer que $f_* \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$. C'est-à-dire que pour tout $B \subseteq F$, on cherche à montrer que $f(f^{-1}(B)) = B$. On va procéder par double inclusion. Soit $B \in\subseteq F$. Tout $b \in f(f^{-1}(B))$ s'écrit $f(a)$ pour $x \in f^{-1}(B)$, donc est dans B ; ce qui prouve l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Pour tout $b \in B$, il existe par surjectivité de f un élément $x \in E$ tel que $f(x) = b$; par définition cet élément x est dans $f^{-1}(B)$; d'où $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, ce qui conclut quant à l'inclusion $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose $f_* \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$ et on cherche à montrer que f est surjective. Pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ n'est pas vide car

$$f(f^{-1}\{y\}) = (f_* \circ f^{-1})(\{y\}) = \{y\} \neq \emptyset.$$

Solution 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On montre la contraposée de la propriété proposée, i.e. si n impair alors n^2 impair. On suppose donc que $n = 2k+1$ pour un entier $k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

qui est impair.

Solution 6. On prouve la contraposée de la propriété de l'énoncé. Supposons $a > b$. Il s'agit alors de montrer

$$\neg(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \simeq \exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon.$$

La valeur $\varepsilon = a - b > 0$ convient alors.

Solution 7. Posons $f : (A \times B) \times C) \to A \times (B \times C)$ la fonction définie par

$$f : ((a,b),c) \mapsto (a,(b,c)).$$

Supposons $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$ tels que $(a,(b,c)) = (a',(b',c'))$. Alors d'une part $a = a'$ et d'autre part $(b,c) = (b',c')$. Il s'en suit que $b = b'$ et $c = c'$. En particulier, on a donc $((a,b),c) = ((a',b'),c')$. Ainsi, f est injective.
Pour tout $(a,(b,c)) \in A \times (B \times C)$, on a $f(((a,b),c)) = (a,(b,c))$. Donc f est surjective.

Solution 8. On vérifie facilement que $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
Comme $A \setminus B = A \cap B^c$, on a

$$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap B^c} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B^c} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B).$$

De même, comme $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, on a

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} = \mathbb{1}_{A\cup B}(1 - \mathbb{1}_{A\cap B}) = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B).$$

Solution 9.

Solution 10. On procède par double implication.
($\Leftarrow$). On va montrer la contraposée : si E est fini, alors il existe une fonction $f : E \to E$ qui ne stabilise que $\emptyset$ et E. C'est clairement vrai pour $E = \emptyset$. On suppose donc maintenant que E est non vide. Notons $E = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ une énumération de l'ensemble fini E. Alors la fonction $f : E \to E$ définie par $f(x_i) = x_{i+1 \pmod n}$ pour

tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ convient. En effet, si $A \subseteq E$ est une partie non vide telle que $f(A) \subseteq A$, on choisit $x \in A$ et on remarque que

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\} = E;$$

ainsi, on a $E \subseteq A$, ce qui conclut.
($\Rightarrow$). Supposons E infini. Soient $f : E \to E$ et $x \in E$. Considérons l'ensemble

$$A = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}^*\} = \{f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}.$$

Alors $f(A) \subseteq A$. Clairement $A \neq \emptyset$. Supposons alors par l'absurde que $A = E$. Comme $x \in E$, il existe alors un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = f^n(x)$. Mais alors A est fini de cardinal $\leq n$, ce qui contredit l'hypothèse $A = E$ infini. Ainsi, A est une partie non triviale stabilisée par f.

Solution 11. (i) Soient $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_{\vartheta_1+\vartheta_2}(f) \colon x \mapsto & f(x + \vartheta_1 + \vartheta_2) \\ &= f((x+\vartheta_1) + \vartheta_2) \\ &= \varphi_{\vartheta_2}(t \mapsto f(t+\vartheta_1))(x) \\ &= \varphi_{\vartheta_2}(\varphi_{\vartheta_1}(f))(x).\end{aligned}$$

(ii) Comme $\varphi_0 = \mathrm{id}_E$, on a pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_\vartheta \circ \varphi_{-\vartheta} = \varphi_{\vartheta-\vartheta} = \mathrm{id}_E = \varphi_{-\vartheta+\vartheta} = \varphi_{-\vartheta} \circ \varphi_\vartheta,$$

ce qui montre que $\varphi_{-\vartheta}$ est l'inverse de φ_ϑ.

Solution 12. On procède par récurrence.
Initialisation : il s'agit de vérifier que $f(0) \geq 0$. La fonction f étant à valeur dans $\mathbb{N}$, c'est vrai.
Hérédité : supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) \geq n$. Alors, par stricte croissance de f, on a $f(n+1) > f(n) \geq n$. Mais $f(n+1)$ est un entier, donc $f(n+1) \geq n+1$.
En vertu du principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f(n) \geq n$.

Solution 13. La bijection cherchée est

$$\begin{aligned} h \colon \mathcal{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A. \end{aligned}$$

Elle est injective : un sous-ensemble $A \subseteq E$ est caractérisé par

$$A = \{x \in E : \mathbb{1}_A(x) = 1\}.$$

Elle est également surjective : toute fonction $f : E \to \{0,1\}$ a comme préimage par h l'ensemble $\{x \in E : f(x) = 1\}$.
Si de plus l'ensemble E est fini de cardinal n, alors on a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^E)$.
Or il est facile de calculer que le cardinal de $\{0,1\}^E$ est 2^n par une récurrence rapide :

1. si $n = 0$, E est l'ensemble vide, donc il y a une unique fonction $E \to \{0,1\}$, et on a bien $\mathrm{Card}(\{0,1\}^E) = 1 = 2^0$,

2. si la propriété est vraie au rang k, et que $\operatorname{Card} \mathrm{E} = k+1$, on note $x_0, x_1, \ldots, x_k$ les $k+1$ éléments de E. Le choix d'une fonction $\mathrm{E} \to \{0,1\}$ est le choix d'une image (0 ou 1) pour x_0 et d'une fonction $\{x_1, \ldots, x_k\} \to \{0,1\}$. Par hypothèse de récurrence, on a ainsi

$$\operatorname{Card}\left(\{0,1\}^{\mathrm{E}}\right) = 2 \times \operatorname{Card}\left(\{0,1\}^{\{x_1,\ldots,x_k\}}\right) = 2 \times 2^k = 2^{k+1}.$$

Solution 14.

Solution 15. On procède par analyse-synthèse.
Analyse. Supposons qu'on ait une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

On commence par calculer $f(0)$ comme suit : on utilise la formule avec $x = y = 0$ pour trouver

$$f(0)^2 - f(0) = 0,$$

i.e. $f(0) = 0$ ou 1. Supposons par l'absurde que ce soit $f(0) = 0$: alors lla formule avec $x = 0$ et $y = 1$ donne $0 = f(0)f(1) - f(0) = 1 + 0 = 1$ ce qui est absurde. Donc $f(0) = 1$. On utilise alors la formule avec $y = 0$ et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(0) - f(0) = x + 0,$$

i.e. f est la fonction $x \mapsto x + 1$.
Synthèse. La fonction $f : x \mapsto x + 1$ respecte bien

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = xy+x+y+1-xy-1 = x+y.$$

Solution 16. L'assertion est **vraie**. Cela peut surprendre de prime abord. Pourtant la négation de l'assertion est :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \text{ et } x \neq 1.$$

Mais il n'existe aucun réel de carré strictement négatif, donc cette dernière assertion est fausse. Sa négation, l'assertion de départ, est donc vraie.

Solution 17. Une première solution est :

$$\forall x \in \mathrm{E} \forall y \in \mathrm{E}, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

En contraposant, on obtient une assertion équivalente :

$$\forall x \in \mathrm{E} \forall y \in \mathrm{E}, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$