

Mémoire rédigé dans le cadre du  
Master 1 de Mathématiques et Applications

# Topos et hypothèse du continu

*Étudiant :*  
Pierre CAGNE

*Encadrant :*  
Emmanuel LEPAGE

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow \chi \\ 1 & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \end{array}$$

---

## Résumé

Ce document est le résultat d'un travail effectué dans le cadre de l'Unité d'Enseignement *Travaux d'étude et de recherche* du second semestre de Master 1 de l'Université Pierre et Marie Curie.

Il traite de l'indépendance de l'hypothèse du continu relativement à ZF dans un cadre toposique. Plus spécifiquement, on y construit un topos de Grothendieck booléen bivalué dans lequel l'hypothèse du continu est fausse.

Le travail effectué se résume principalement à un lecture encadrée de l'ouvrage [MM92].

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Liminaires</b>	<b>2</b>
1.1 Un mot sur le cadre ensembliste . . . . .	2
1.2 Généralités . . . . .	2
1.3 Diagrammes, limites . . . . .	4
1.4 Préfaisceaux en ensembles . . . . .	6
1.5 La catégorie <b>Sets</b> . . . . .	7
<b>2 Topos de Grothendieck</b>	<b>13</b>
2.1 Faisceaux sur un espace topologique . . . . .	14
2.2 Cribles . . . . .	15
2.3 Topologies de Grothendieck . . . . .	17
2.4 Topos de Grothendieck . . . . .	19
2.5 Faisceau associé à un préfaisceau . . . . .	22
2.6 Classifiant des sous-faisceaux . . . . .	29
2.7 Exponentiations . . . . .	33
<b>3 Topos de Cohen</b>	<b>35</b>
3.1 Algèbre de Heyting . . . . .	36
3.2 Objet des entiers naturels . . . . .	41
3.3 Topos de Cohen . . . . .	42

# Introduction

# Chapitre 1

## Liminaires

Ce chapitre introduit les notions et notations utiles pour la suite. Bien qu'on y rappelle toutes les notions du langage catégorique, intensément utilisé par la suite, le lecteur est supposé familier de ce dernier.

### 1.1 Un mot sur le cadre ensembliste

Les constructions mises en jeu dans ce document, notamment celle de catégorie de foncteurs, ont tendance à faire augmenter drastiquement la taille des objets considérés. Sans restriction sur la structure de ces derniers, on engendre facilement des artefacts peu appréciables. Par exemple, considérant les préfaisceaux en ensembles sur la catégorie des anneaux, Waterhouse construit dans [Wat75] un préfaisceau sans faisceau associé. Or nous verrons que la notion de faisceau associé (comme adjoint à gauche de l'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux) joue un rôle primordiale dans la construction du topos de Cohen.

Il convient donc de préciser le cadre qu'on adopte. Ainsi, par *collection*, on désigne tout ensemble naïf. On fixe pour tout le reste du document un modèle de ZFC dont les éléments sont appelés *ensembles*. Une collection est alors dite *petite* si elle est un ensemble (i.e. un élément du modèle).

Remarquons ici que l'on pourrait s'accorder un cadre légèrement plus large, nommé univers de Grothendieck, qui a l'avantage de définir des notions de *petitesse* et *largesse* relatives. Le détail peut se trouver dans l'introduction de [AGV72].

### 1.2 Généralités

Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  est la donnée d'une collection  $\text{Ob } \mathcal{C}$  d'*objets* et d'une collection  $\text{Hom } \mathcal{C}$  de *morphismes* (dits aussi *flèches*) munies des opérations suivantes :

- dom (dite *domaine* ou *source*) et cod (dite *codomaine* ou *extrémité*) associant à tout morphisme de  $\text{Hom } \mathcal{C}$  un objet de  $\text{Ob } \mathcal{C}$  ; les notations  $f: A \rightarrow B$  et  $A \xrightarrow{f} B$  signifie que le morphisme  $f$  est de domaine  $A$  et de codomaine  $B$  ;
- $\circ$  (dite *composition*) qui à tous morphismes  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  associe un morphisme  $f \circ g: A \rightarrow C$  ; on notera aussi  $fg$  pour  $f \circ g$  ;

- 1 (dite *identité*) qui à tout objet  $A$  associe un morphisme  $1_A$ .
- Ces opérations sont supposées vérifier les conditions suivantes :
- pour tous morphismes  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ ,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h);$$

- pour tout morphisme  $f: A \rightarrow B$ ,

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

Étant donnés deux objets  $A$  et  $B$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , on note  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  (ou plus simplement  $\text{Hom}(A, B)$  s'il n'y pas d'ambiguïté sur la catégorie concernée) la sous-collection de  $\text{Hom}\mathcal{C}$  formée des flèches de domaine  $A$  et codomaine  $B$ . La catégorie  $\mathcal{C}$  est dite *localement petite* si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  est petit pour tous  $A$  et  $B$ . Elle est dite *petite* si  $\text{Hom}\mathcal{C}$  et  $\text{Ob}\mathcal{C}$  sont petites (elle est alors notamment localement petite). Elle est enfin dite *finie* si  $\text{Hom}\mathcal{C}$  et  $\text{Ob}\mathcal{C}$  sont des ensemble finis. Sauf mention du contraire, toutes les catégories de ce document seront localement petite.

*Exemple(s)* 1.2.1.

- (i) La catégorie **Sets** des ensembles et applications ensemblistes, la catégorie **Tops** des espaces topologiques et applications continues, la catégorie **Grps** de groupes et morphismes de groupes, la catégorie **Rings** des anneaux et morphismes d'anneaux, etc.
- (ii) La catégorie vide  $\emptyset$  sans objet ni morphisme.
- (iii) La catégorie  $1$  à un unique objet et comme seule flèche l'identité de cet objet. Plus généralement, la catégorie discrète  $n$  à  $n \in \mathbb{N}$  objets et aucun morphisme non trivial.
- (iv) Donnons ici un exemple important pour la suite. Un ensemble partiellement ordonné  $(P, \prec)$  (ou même plus généralement un préordre) peut être vu comme une catégorie : les objets sont les éléments de  $P$ , et pour  $x, y \in P$ , il existe une unique flèche  $x \rightarrow y$  si  $x \prec y$  et aucune sinon. Par exemple, pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'ordinal  $\mathbf{n} = \{0 < 1 < \dots < n - 1\}$  peut être considérée comme la catégorie<sup>1</sup>

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n - 1.$$

Étant donnée une catégorie  $\mathcal{C}$ , on note  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  la catégorie, dite *opposée*, dont la collection des objets est  $\text{Ob}\mathcal{C}$  et dont les morphismes sont les  $f: A \rightarrow B$  pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ . (La composition étant induite par celle de  $\mathcal{C}$ .)

- Un foncteur (*covariant*)  $F$  entre deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la donnée
- pour chaque objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , d'un objet  $F(C)$  (encore noté  $FC$ ) de  $\mathcal{D}$ ,
  - pour chaque flèche  $f: A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , d'une flèche  $F(f): FA \rightarrow FB$  (encore notée  $Ff$ ) de  $\mathcal{D}$ ,

vérifiant

- pour toutes flèches  $f: A \rightarrow B$  et  $g: B \rightarrow C$  de  $\mathcal{C}$ ,

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

---

1. La définition porte à confusion pour  $n = 0$ , mais bien entendu la dénomination *ordinaire* suppose  $\mathbf{0} = \emptyset$ .

– pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,

$$F(1_A) = 1_{FA}.$$

On note facilement  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  pour spécifier les catégories mises en jeu par un foncteur. Un foncteur  $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  est parfois appelé foncteur *contravariant* de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ .

Les foncteurs admettent une composition : étant donnés  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  deux foncteurs, on forme le foncteur  $G \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  (encore noté  $FG$ ) défini par

$$\begin{aligned} G \circ F(A) &= G(F(A)) \quad \text{pour tout objet } A \text{ de } \mathcal{C}, \\ G \circ F(f) &= G(F(f)) \quad \text{pour toute flèche } f \text{ de } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Cette composition admet comme neutre le foncteur identité  $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  opérant trivialement sur les objets et les flèches de  $\mathcal{C}$ .

Une *transformation naturelle*  $\theta$  d'un foncteur  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  à un foncteur  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est la donnée d'une famille  $(\theta_X: FX \rightarrow GX)$  indexée par  $\text{Ob } \mathcal{C}$  telle que pour tout  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ \theta_X \downarrow & & \downarrow \theta_Y \\ GX & \xrightarrow{Gf} & GY \end{array}$$

commute. On écrira  $\theta: F \rightarrow G$ . Si toutes les flèches  $\theta_X$  sont des isomorphismes,  $\theta$  est dit un *isomorphisme naturel* et on notera  $F \sim G$  si l'on ne veut pas préciser ce dernier. Deux transformations naturelles  $\theta: F \rightarrow G$  et  $\rho: G \rightarrow H$  se composent en une transformation naturelle  $\rho \circ \theta: F \rightarrow H$  donnée par la famille  $(\rho_X \theta_X: FX \rightarrow HX)$ .

Une *équivalence de catégories* entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  est la donnée de deux foncteurs  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tels que  $GF \sim 1_{\mathcal{C}}$  et  $FG \sim 1_{\mathcal{D}}$ .

Un foncteur  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est l'*adjoint à gauche* de  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , noté  $F \dashv G$ , si pour tout  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et tout  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , il existe des isomorphismes naturels  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G-) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, -)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, GY) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, FY)$ . On dit aussi que  $G$  est *adjoint à droite* de  $F$ . Pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , la flèche  $\eta: X \rightarrow GFX$  correspondant à  $1_{FX}$  est appelée *unité en  $X$* , la flèche  $\varepsilon: FGY \rightarrow Y$  correspondant à  $1_{GY}$  est appelée *counité en  $Y$* . Remarquons que dans le cas où  $F$  et  $G$  forment une équivalence de catégorie, on a  $F \dashv G \dashv F$ .

### 1.3 Diagrammes, limites

Étant données une catégorie **petite**  $\mathcal{J}$  et une catégorie quelconque  $\mathcal{C}$ , on peut former la catégorie  $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$  dont les objets sont les foncteurs  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  et les morphismes les transformations naturelles entre eux.

Un *diagramme* dans  $\mathcal{C}$  de type  $\mathcal{J}$  est un objet de  $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ . Cette définition rencontre bien l'intuition d'un diagramme commutatif. Par exemple, un carré commutatif dans  $\mathcal{C}$  est un diagramme de type

$$\mathcal{J}: \begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} .$$

Pour  $C \in \mathcal{C}$ , un diagramme particulier de type  $\mathcal{J}$  est le *diagramme constant*  $\Delta_{\mathcal{J}}(C)$  associant  $C$  à tout  $j \in \text{Ob } \mathcal{J}$ , et  $1_C$  à toute  $(j \rightarrow j') \in \text{Hom } \mathcal{J}$ . On définit alors un *cône* sur un diagramme  $A$  de sommet  $C$  comme un morphisme  $\Delta_{\mathcal{J}}(C) \rightarrow A$ , i.e. une famille de flèches  $(f_j : C \rightarrow A(j))_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}}$  tel que

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ f_j \downarrow & \searrow f_k & \\ A(j) & \xrightarrow{A(u)} & A(k) \end{array}$$

commute pour tout  $u : j \rightarrow k \in \text{Hom } \mathcal{J}$ . On le note  $f : C \rightarrow A$  pour plus de simplicité. Un cône  $\pi : L \rightarrow A$  est dit *universel* si pour tout autre cône  $f : C \rightarrow A$ , on a une unique flèche  $g : C \rightarrow L$  tel que

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \downarrow g & \\ & L & \\ \pi_j \swarrow & & \searrow \pi_k \\ A(j) & \xrightarrow{A(u)} & A(k) \end{array}$$

commute. On appelle alors  $\pi : L \rightarrow A$  une *limite* du diagramme  $A$  dans  $\mathcal{C}$  et on note  $L = \varprojlim_{\mathcal{J}} A$  quand la transformation naturelle  $\pi$  est sous-entendue. Une limite est unique à unique isomorphisme près.

Un morphisme  $f : A \rightarrow \Delta_{\mathcal{J}}(C)$  est dit un *cocône* et est la *colimite* du diagramme  $A$  dans  $\mathcal{C}$  si le cône induit  $f^{\text{op}} : \Delta_{\mathcal{J}^{\text{op}}}(C) \rightarrow A^{\text{op}}$  est la limite du diagramme induit  $A^{\text{op}} : \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  dans  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . On note alors  $\varinjlim_{\mathcal{J}} A$  le sommet de la colimite.

*Exemple(s)* 1.3.1. Il y a des limites et colimites classiques à connaître que l'on utilisera tout le long du reste du document.

**Produit** Un *produit* (cartésien) dans  $\mathcal{C}$  est la limite d'un diagramme de type :

- •. C'est-à-dire que le produit de deux objets  $A$  et  $B$ , noté  $A \times B$ , est, s'il existe, un objet muni de  $p_1 : A \times B \rightarrow A$  et  $p_2 : A \times B \rightarrow B$  tel que pour tout objet  $C$  muni de  $f_1 : C \rightarrow A$  et  $f_2 : C \rightarrow B$ , il existe  $g : C \rightarrow A \times B$  tel que

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \downarrow g & \\ & A \times B & \xrightarrow{p_1} B \\ f_1 \swarrow & & \searrow f_2 \\ & A & \\ & \downarrow p_2 & \end{array}$$

commute.

**Somme disjointe** Une *somme disjointe*, aussi appelée *coproduit*, est une colimite d'un diagramme de type : • •. La somme disjointe de deux objets  $A$  et  $B$  est notée  $A \amalg B$ .



**Produit fibré** Le *produit fibré* de  $f: A \rightarrow C$  et  $g: B \rightarrow C$ , aussi appelé *pullback* (dénomination anglaise), est la limite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Il est noté  $A \times_C B$  si  $f$  et  $g$  sont implicites.

**Somme amalgamée** La *somme amalgamée* de  $f: C \rightarrow A$  et  $g: C \rightarrow B$ , aussi appelée *pushforward* (dénomination anglaise), est la limite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

Elle est notée  $A \amalg_C B$  si  $f$  et  $g$  sont implicites.

**Objet initial/terminal** Un objet  $* \in \text{Ob } \mathcal{C}$  est dit initial s'il est une limite du diagramme  $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . C'est-à-dire que pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , il y a exactement une flèche  $* \rightarrow C$ .

Un objet  $* \in \text{Ob } \mathcal{C}$  est dit terminal s'il est une colimite du diagramme  $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . C'est-à-dire que pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , il y a exactement une flèche  $C \rightarrow *$ .

Remarquons que dans une catégorie avec un objet initial  $*$  et un objet terminal  $\star$ , le produit est un cas particulier du pullback au-dessus de  $C = \star$  et la somme disjointe est un cas particulier du pushforward sur  $C = *$ .

**Égaliseur** Un égaliseur dans  $\mathcal{C}$  est une limite d'un diagramme de type  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ . L'égaliseur de  $f, g: C \rightrightarrows D$  est donc un objet  $E$  muni d'une flèche  $e: E \rightarrow C$  tel que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & C \xrightarrow[f]{g} D \\ \uparrow & \nearrow d & \\ \exists! h & & \\ \vdots & & \\ F & & \end{array}$$

commute pour tout  $d: F \rightarrow C$  satisfaisant  $fd = gd$ .

Une (co)limite est dite *finie* si elle est de type  $\mathcal{J}$  avec  $\mathcal{J}$  finie. Une catégorie ayant toutes les limites finies a notamment un objet terminal puisque c'est la limite du diagramme de type  $\emptyset$ .

## 1.4 Préfaisceaux en ensembles

On rappelle qu'une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite localement petite si pour tous objets  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , la collection  $\text{Hom}(A, B)$  est un objet de **Sets**. Cela nous permet de définir le *foncteur de Yoneda* associé à  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_C &= \text{Hom}(-, C): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets} \\ D &\mapsto \text{Hom}(D, C) \\ f &\mapsto (g \mapsto fg). \end{aligned}$$

Remarquons alors que pour  $C, D \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , une flèche  $h: C \rightarrow D$  induit pour tout  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  une flèche  $h_X: \text{Hom}(X, C) \rightarrow \text{Hom}(X, D)$  définie par  $h_X(f) = fh$ . De plus, pour toute flèche  $g: X \rightarrow Y$ , il est clair que

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(Y, C) & \xrightarrow{\mathbf{y}_C(g)} & \text{Hom}(X, C) \\ \downarrow h_Y & & \downarrow h_X \\ \text{Hom}(Y, D) & \xrightarrow{\mathbf{y}_D(g)} & \text{Hom}(X, D) \end{array}$$

commute.  $(h_X)_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}}$  réalise donc une transformation naturelle  $h_*: \mathbf{y}_C \rightarrow \mathbf{y}_D$ . On a donc envie de voir l'application  $C \mapsto \mathbf{y}_C, h \mapsto h_*$  comme un foncteur. Mais vers quelle catégorie? Cela motive la définition suivante.

**Définition 1.4.1** (Catégorie des préfaisceaux). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie **petite**. Un *préfaisceau en ensembles* sur  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ . La catégorie  $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$  des préfaisceaux en ensembles sur  $\mathcal{C}$  est notée  $\text{PSh}(\mathcal{C})$  ou  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

*Remarque.*

- (1) La catégorie  $\mathcal{C}$  est requise petite afin que  $\widehat{\mathcal{C}}$  soit encore localement petite.
- (2) On a spécifié préfaisceaux **en ensembles** car on peut considérer des préfaisceaux en anneaux, en groupes, etc. Plus généralement, on peut considérer les préfaisceaux à valeurs dans  $\mathcal{D}$  comme les foncteurs  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

Ceci dit, dans le reste du document, on ne s'intéresse qu'aux préfaisceaux en ensembles, qu'on appelle donc simplement *préfaisceaux*.

D'après ce qui précède,  $\mathbf{y}: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$  est un foncteur appelé *plongement de Yoneda*. Les foncteurs isomorphes à un  $\mathbf{y}_C$  dans  $\widehat{\mathcal{C}}$  sont dits *représentables*. Le résultat suivant est connu sous le nom de lemme de Yoneda.

**Lemme 1.4.2** (Yoneda). Soit  $P$  un préfaisceau sur  $\mathcal{C}$ . Alors les préfaisceaux  $P$  et  $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(-), P)$  sont isomorphes dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

Plus explicitement, l'isomorphisme naturel est donné par

$$\theta_C: \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_C, P) \rightarrow P(C), \alpha \mapsto \alpha_C(1_C) \quad \forall C \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

Notamment, étant donné  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , prenant  $P = \mathbf{y}_C$ , le lemme de Yoneda énonce que pour tout  $D \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , les ensembles  $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_D, \mathbf{y}_C)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C)$  sont en bijection. Autrement dit,  $\mathbf{y}$  est pleinement fidèle, ce qui justifie le terme de *plongement*.

## 1.5 La catégorie Sets

Dans cette section, nous essayons de déterminer les caractéristiques de la catégorie **Sets** et de les énoncer purement catégoriquement. De cette manière, il nous sera possible de déterminer les catégories ayant des caractéristiques similaires.

On rappelle que **Sets** est la catégorie dont les objets sont les ensembles (i.e. les collections petites) et dont les flèches sont les applications ensemblistes. On est habitué à décrire les notions ensemblistes telles que l'injection, la surjection, l'image d'une fonction, etc. via la relation binaire  $\in$  d'appartenance, dont il s'agit ici de s'abstraire. Commençons par généraliser le vocabulaire habituelle sur les flèches de **Sets**.

**Définition 1.5.1** (Monomorphismes, épimorphismes). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un *monomorphisme* est une flèche  $f: A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  telle que pour toutes flèches  $g, h: C \rightrightarrows A$ ,  $fg = fh$  implique  $g = h$ . On note  $f: A \rightarrowtail B$ .

Un *épimorphisme* est une flèche  $f: A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  telle que pour toutes flèches  $g, h: B \rightrightarrows C$ ,  $gf = hf$  implique  $g = h$ . On note  $f: A \twoheadrightarrow B$ .

Cela généralise les notions d'injection et surjection. En effet, si  $f: A \rightarrow B$  monomorphisme de **Sets**, prenons  $x, y \in A$  tel que  $f(x) = f(y)$ ; alors  $f \circ (\{x\} \rightarrow A) = f \circ (\{y\} \rightarrow A)$  dont on déduit  $x = y$ . Réciproquement, si  $f$  injective, on a  $fg(x) = fh(x)$  qui implique  $g(x) = h(x)$  pour tout  $x \in A$ , i.e.  $g = h$ . De même, si  $f: A \rightarrow B$  épimorphisme de **Sets**, on note  $\chi: B \rightarrow \{0, 1\}$  la fonction caractéristique de  $f(A)$  dans  $B$  et  $1: B \rightarrow \{0, 1\}$  celle de  $B$  dans  $B$ ; alors  $\chi f = 1f$ , ce qui montre  $\chi = 1$ , i.e.  $f$  surjective. Réciproquement, si  $f$  surjective,  $gf = hf$  implique que  $g$  et  $h$  coïncident sur  $f(A)$ , c'est-à-dire sur  $B$ .

Ce qui précède met en lumière deux idées : la notion d'élément de  $S$  est catégorifiée par les flèches de codomaine  $S$ ; celle de sous-ensemble s'exprime bien par les fonctions caractéristiques. Cela nous amène aux définitions suivantes.

**Définition 1.5.2** (Catégorie au-dessus d'un objet). Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $C$  un objet de  $\mathcal{C}$ . La *catégorie au-dessus de  $C$* , notée  $\mathcal{C}/C$ , a pour objet les flèches de  $\mathcal{C}$  de codomaine  $C$ , et pour  $f: A \rightarrow C$  et  $g: B \rightarrow C$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/C}(f, g)$  est formé des  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  telles que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & C \end{array}$$

commute.

Les objets de  $\mathcal{C}/C$  sont parfois appelés les *éléments généralisés* de  $C$ .

On peut maintenant définir une notion de *sous-objet* (équivalent des sous-ensembles) à laquelle on attachera une notion de *classifiant* (équivalent des fonctions caractéristiques).

**Définition 1.5.3** (Sous-objet). Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $C$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Un *sous-objet* de  $C$  est une classe d'isomorphie d'objets monomorphiques de  $\mathcal{C}/C$ .

Plus explicitement, un monomorphisme  $A \rightarrowtail C$  dans  $\mathcal{C}$  définit un sous-objet, que définissent aussi tous les  $B \rightarrowtail C$  tels qu'il existe un isomorphisme  $h: A \rightarrow B$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{h} & B \\ & \searrow & \swarrow \\ & & C \end{array}$$

On fera souvent l'abus d'appeler sous-objet  $A \rightarrowtail C$  plutôt que sa classe d'isomorphie, voire  $A$  lui-même quand le monomorphisme est sous-entendu. Les sous-objets de  $S$  dans **Sets** sont alors les (inclusions des) sous-ensembles de  $S$  (à isomorphisme près).

Pour  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , notons alors  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$  le quotient par la relation d'isomorphie de la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}/X$  d'objets monomorphiques. Les objets

de  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$  sont donc les sous-objets de  $X$ . Les flèches de cette catégorie sont les  $f: A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

$\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$  est une catégorie *fine*, i.e. il a au plus une flèche entre deux objets : en effet, si

$$f, g: (A \xrightarrow{i_A} X) \rightrightarrows (B \xrightarrow{i_B} X),$$

on a  $i_B f = i_A = i_B g$  et la monomorphie de  $i_B$  dans  $\mathcal{C}$  conclut  $f = g$ . Comme on a, de plus, quotienté par la relation d'isomorphie, il est clair que tout objet n'est plus isomorphe qu'à lui-même. En particulier, si  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$  est petite, c'est un ensemble partiellement ordonné par  $: A \preceq B$  si et seulement si  $\text{Hom}_{\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)}(A, B) \neq \emptyset$ . C'est notamment le cas quand  $\mathcal{C}$  est la catégorie **Sets** :  $\text{Sub}_{\mathbf{Sets}}(X)$  est alors simplement le treillis  $\mathcal{P}(X)$ . Une catégorie  $\mathcal{C}$  où  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$  est petite pour tout  $X$  est dite *well-powered*.

Afin de motiver la prochaine définition, rappelons que pour tout ensemble  $S$ , l'ensemble  $\mathcal{P}(S)$  des sous-ensembles de  $S$  est en bijection avec l'ensemble  $\{\chi: S \rightarrow \{0, 1\}\}$  des applications de  $S$  dans  $\{0, 1\}$ . En effet, un sous-ensemble  $A \subseteq S$  détermine l'application  $\chi_A: S \rightarrow \{0, 1\}, x \in A \mapsto 0, x \notin A \mapsto 1$  caractéristique de  $A$  dans  $S$ . Réciproquement, une fonction  $\chi: S \rightarrow \{0, 1\}$  détermine le sous-ensemble  $\chi^{-1}(\{0\})$ . Ainsi, notant  $2 = \{0, 1\}$ ,  $1 = \{0\}$  et  $\text{true}: 1 \rightarrow 2$  l'inclusion, tout sous-ensemble  $A \subseteq S$  rend cartésien le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ S & \xrightarrow{\chi_A} & 2. \end{array}$$

Ayant ainsi exprimé la notion de fonction caractéristique, on peut la définir dans toute catégorie.

**Définition 1.5.4** (Classifiant des sous-objets). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant toutes les limites finies, d'objet terminal 1. Un *classifiant des sous-objets* dans  $\mathcal{C}$  est un objet  $\Omega \in \text{Ob } \mathcal{C}$  muni d'une flèche  $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$  tel que pour tout monomorphisme  $A \hookrightarrow S$  de  $\mathcal{C}$ , il existe une unique flèche  $\chi: S \rightarrow \Omega$  rendant cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ S & \dashrightarrow_{\chi} & \Omega. \end{array}$$

On fera souvent l'abus de dire que  $\Omega$  est le classifiant. On a vu que **Sets** admet le classifiant 2 muni de  $\text{true}: 1 \rightarrow 2$ .

La propriété fondamentale du classifiant est qu'il représente le foncteur sous-objets. Notre catégorie  $\mathcal{C}$  ayant ici toutes les limites finies, elle admet notamment

tous les pullbacks. Ainsi, pour  $f: Y \rightarrow X$ , on a le foncteur changement de base  $f^*: \mathcal{C}/X \rightarrow \mathcal{C}/Y$ , défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A \times_X Y & \xrightarrow{h^*(f)} & A \\ f^*(h) \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Remarquons que le pullback d'un monomorphisme est monomorphique : pour  $g_1, g_2: B \rightrightarrows A \times_X Y$  tels que  $f^*(h)g_1 = f^*(h)g_2$ , la commutativité du carré cartésien montre  $hh^*(f)g_1 = hh^*(f)g_2$  que la monomorphie de  $h$  réduit à  $h^*(f)g_1 = h^*(f)g_2$  ; la propriété universelle du pullback énonce l'existence d'une unique  $\varphi: B \rightarrow A \times_X Y$  tel que

$$\begin{array}{ccccc} & & & & h^*(f)g_1 = h^*(f)g_2 \\ & & & & \searrow \\ & & & & B \\ & & & & \swarrow \varphi \\ & & & & A \times_X Y \\ & & & & \downarrow f^*(h) \\ & & & & Y \\ & & & & \downarrow f \\ & & & & X \end{array}$$

commute. Les flèches  $g_1$  et  $g_2$  satisfont à la condition sur  $\varphi$ , donc sont égales : on a donc  $f^*(h)$  monomorphique. Ainsi, le foncteur  $f^*$  se restreint en un foncteur  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{C}}(Y)$ . Ceci montre que, dans le cas où  $\mathcal{C}$  est well-powered,  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(-)$  réalise un préfaisceau  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ . Par exemple, dans le cas où  $\mathcal{C}$  est petite,  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(-)$  est un objet de  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

La proposition suivante énonce que le classifiant  $\Omega$  représente le préfaisceau  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(-)$ , et réciproquement.

**Proposition 1.5.5.** *Soit  $\mathcal{C}$  une well-powered catégorie ayant toute limite finie. Alors  $\mathcal{C}$  admet un classifiant des sous-objets  $\Omega$  si et seulement si il existe un isomorphisme naturel*

$$\theta: \text{Sub}_{\mathcal{C}}(-) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \Omega).$$

*Preuve.* Supposons que  $\mathcal{C}$  admet un classifiant  $\Omega \in \text{Ob } \mathcal{C}$  muni de  $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$ . Alors pour tout  $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , et tout sous-objet  $A \twoheadrightarrow S$ , il existe une unique flèche  $\chi_A$  rendant cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ S & \xrightarrow{\chi_A} & \Omega. \end{array}$$

Posons alors l'application

$$\theta_S: \text{Sub}_{\mathcal{C}}(S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, \Omega), A \mapsto \chi_A,$$

et montrons que la collection  $\theta = (\theta_S)_{S \in \text{Ob } \mathcal{C}}$  est naturelle. Cela vient directement de la définition des images des flèches par  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(-)$  : pour  $f: S' \rightarrow S$ , le

carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}(f)(A) & \xrightarrow{\text{Sub}(f)} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

est cartésien, rendant la concaténation

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sub}(f)(A) & \xrightarrow{\text{Sub}(f)} & A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ S' & \xrightarrow{f} & S & \xrightarrow{\chi_A} & \Omega. \end{array}$$

cartésienne dans son ensemble (i.e. le grand rectangle est cartésien). Ainsi  $\chi_A f$  est, par unicité, la flèche caractéristique de  $\text{Sub}(f)(A)$ , montrant la naturalité de  $\theta$ .

Réciproquement, supposons un isomorphisme naturel

$$\theta: \text{Sub}_{\mathcal{C}}(-) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \Omega).$$

Comme  $\mathcal{C}$  a toute limite finie, elle a un objet terminal (limite du diagramme  $\emptyset \rightarrow \mathcal{C}$ ). Notons  $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$  la flèche  $\theta_1(1)$ . Montrons alors que  $\Omega$  muni de  $\text{true}$  est un classifiant de  $\mathcal{C}$ . Fixons  $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , et pour tout sous-objet  $A \rightrightarrows S$ , posons  $\chi_A = \theta_S(A)$ . Alors, comme  $\mathcal{C}$  a toute limite finie, le pullback  $X$  de  $\text{true}$  le long de  $\chi_A$  est bien défini, rendant cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ S & \xrightarrow{\chi_A} & \Omega. \end{array}$$

La monomorphie de  $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$  assure celle de  $X \rightrightarrows S$ . Alors la naturalité de  $\theta$  et montre alors  $\chi_X = \chi_A$ , i.e.  $\theta_S(X) = \theta_S(A)$  et la bijectivité de  $\theta_S$  conclut  $X = A$ .  $\square$

Enfin, on remarque que pour tous ensembles  $A$  et  $B$ , la catégorie **Sets** contient un objet  $B^A = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A, B)$  des fonctions de  $A$  dans  $B$ . Il s'agit donc de comprendre cet objet  $B^A$  en terme catégorique. Le lemme de Yoneda nous pousse à le faire en étudiant les flèches à valeurs dans  $B^A$ . On sait que pour tout ensemble  $C$ , il y a une bijection

$$\text{Hom}(C \times A, B) \simeq \text{Hom}(C, B^A), f \mapsto \{c \mapsto f(c, \cdot)\}$$

qu'on appelle opération de curryfication. Cette bijection est facilement naturelle en  $C$ , motivant ainsi la définition suivante.

**Définition 1.5.6** (Objet exponentiel). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant tout produit fini. On dit que  $\mathcal{C}$  admet une exponentiation de  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  si le foncteur  $- \times A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  admet un adjoint à droite. On note alors ce dernier  $(-)^A$ .

Notons que la counité de l'adjonction  $- \times A \dashv (-)^A$  permet de retrouver la notion d'évaluation d'une fonction :

$$e: B^A \times A \rightarrow B.$$

Les différentes notions introduites ci-dessus capturent l'essence de la catégorie **Sets**. L'idée introduite par Lawvere dans [Law64] est que ces différentes caractéristiques suffisent à faire d'une catégorie un univers convenable pour développer les mathématiques. Aussi définit-on la notion de topos élémentaire comme suit.

**Définition 1.5.7** (Topos élémentaire). Un *topos élémentaire* est une catégorie  $\mathcal{E}$  admettant

- (i) toutes les limites finies et colimites finies,
- (ii) l'exponentiation de tout objet,
- (iii) un classifiant des sous-objets.

Retirant les hypothèses de locale petitesse qu'on s'est atteinte, Lawvere définit même les topos élémentaires comme une base de fondation des mathématiques (au même titre que ZFC par exemple). Nous ne rentrerons pas dans des considérations fondamentalistes qui ne nous intéressent que très peu ici.

On a donc développé une axiomatique des topos élémentaires. Reste à savoir si l'on peut en trouver des modèles intéressants autres que **Sets**. C'est l'objet du chapitre suivant. On y introduit la notion de topos de Grothendieck, une classe de topos élémentaires, qui nous suffira à construire le topos de Cohen où l'hypothèse du continu échoue. Le point de vue change radicalement et devient géométrique, les topos de Grothendieck se voulant historiquement la notion d'espaces généralisés dans lesquels évoluent naturellement les objets de la géométrie algébrique.

## Chapitre 2

# Topos de Grothendieck

Dans ce chapitre, nous entrons dans le vif du sujet et définissons les topos de Grothendieck. Nous commençons par introduire la notion de faisceau sur un espace topologique classique afin à la fois de motiver et d'illustrer les notions ultérieures : il est bon d'avoir les exemples de topologie classique en tête pour penser les notions généralisées dans les topologies de Grothendieck.

Le chapitre se poursuit par l'introduction des *cribles*, généralisation catégorique des recouvrements ouverts d'un espace topologique classique. On établira notamment une dualité de conception de ces objets : les cribles peuvent être vus comme des sous-foncteurs du plongement de Yoneda ou comme des collections de morphismes *fermées par postcomposition*. La première description permet d'énoncer les propriétés des cribles de façon concise et diagrammatique quand la seconde capture mieux l'analogie avec les recouvrements.

Nous pourrions alors définir une topologie de Grothendieck sur une catégorie (petite). C'est la notion centrale de ce chapitre, qui généralise la topologie classique sur les ensembles. La motivation principale de cette généralisation est la volonté de Grothendieck et al. d'établir une cohomologie (dite étale) des schémas (voir [AGV72]). C'est en ce sens que Grothendieck pose le principe phare de sa nouvelle topologie : les ouverts ne sont pas *dans* l'espace, mais *au-dessus*. Dérivant de cela, les topologies ne sont plus soumises au carcan des treillis  $\mathcal{P}(-)$  et les flèches au-dessus de l'espace priment sur les ouvert eux-même. Cette nouvelle notion recapture évidemment la topologie classique en se plaçant dans la catégorie (petite)  $\mathcal{O}(X)$  d'un espace classique  $X$ , mais l'étend drastiquement : on peut par exemple poser une topologie de Grothendieck naturelle sur une sous-catégorie (ayant de bonnes propriétés) de **Tops** capturant toutes les topologies classiques des objets de celle-ci. On détaillera en particulier une topologie de Grothendieck utilisée par la suite dans la construction du topos de Cohen : la topologie dense, aussi appelée  $\neg\neg$ -topologie, d'un ensemble partiellement ordonné.

Une fois les topologies de Grothendieck définies, il est possible de poursuivre la généralisation par celle des (pré)faisceaux sur le site créé. Ceux-ci forment encore une catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles : une telle catégorie est alors un *topos de Grothendieck*. Nous étudions par la suite quelques propriétés de ces objets et prouvons qu'ils ont toutes les notions requises pour *ressembler* à la catégorie **Sets** (i.e. sont des topos élémentaires).



## 2.1 Faisceaux sur un espace topologique

On introduit dans cette section la notion de faisceaux (en ensembles) sur un espace topologique afin de faciliter la compréhension de faisceaux plus généraux introduits ultérieurement.

Pour un espace topologique  $X$ , on note  $C(X)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $X$  à valeurs réelles. Notamment, cela définit  $C(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  muni de la topologie induite. Fixons un tel ouvert  $U$ . Pour tout ouvert  $V \subseteq U$ , on a une application de restriction  $C(U) \rightarrow C(V)$  donnée par  $f \mapsto f|_V$ . Ces applications de restrictions respectent la transitivité de l'inclusion au sens suivant : si  $W \subseteq V \subseteq U$ , pour toute fonction  $f \in C(U)$ ,  $(f|_V)|_W = f|_W$ . Cette propriété est en fait une propriété fonctorielle. Notons  $\mathcal{O}(X)$  le treillis des ouverts de  $X$ , qu'on voit comme une catégorie. On vient alors d'énoncer que  $C(-)$  est un foncteur contravariant  $\mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ . Ce foncteur respecte une propriété spécifique de *recollement* : pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $U$ , toute famille  $(f_i) \in \prod_i C(U_i)$  vérifiant  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  définit une unique application  $f \in C(U)$  telle que  $f|_{U_i} = f_i$ .

C'est cette dernière propriété que la notion de faisceau capture : les objets globaux sont définis localement avec de bons recollements.

**Définition 2.1.1** (Faisceau). Un *faisceau* sur un espace topologique  $X$  est un préfaisceau  $F : \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  satisfaisant la condition suivante : notant  $\uparrow_V^U = F(V \hookrightarrow U)$  la flèche image des inclusions d'ouverts  $V \subseteq U$ , pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  d'un ouvert  $U$  de  $X$ , toute famille  $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F(U_i)$  vérifiant

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I,$$

définit un unique élément  $f \in F(U)$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $f|_{U_i} = f_i$ .

La condition pour qu'un préfaisceau soit un faisceau est une condition d'existence unique. On introduit du vocabulaire concernant ceux qui ne satisfont que l'unicité. On verra plus loin qu'ils sont une sorte d'étape intermédiaire entre les préfaisceaux généraux et les faisceaux. Un préfaisceau  $F$  sur  $X$  est dit *séparé* si pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  d'un ouvert  $U \subseteq X$ , et tous  $f, g \in F(U)$ ,

$$(\forall i \in I, f|_{U_i} = g|_{U_i}) \implies f = g.$$

*Exemple(s) 2.1.2.* Outre l'exemple canonique  $C(-)$ , les faisceaux se rencontrent naturellement en topologie.

- (1) La catégorie des fibrés au-dessus d'un espace topologique  $B$  est la catégorie  $\mathbf{Tops} / B$ . Étant donné un fibré  $p : X \rightarrow B$ , une section locale  $s : U \rightarrow X$  où  $U$  est un ouvert de  $B$  est un morphisme entre les fibrés  $i : U \rightarrow B$  et  $p : X \rightarrow B$ . Notons

$$\Gamma_p U = \{s : U \rightarrow X \mid p \circ s = (U \rightarrow B)\}$$

l'ensemble des sections de  $p$  de domaine  $U$ . Alors  $\Gamma_p$  est un faisceau.

Notamment, prenant  $p = 1_X : X \rightarrow X$ , on a que  $\Gamma_p = \mathcal{O}(-)$  est un faisceau sur  $X$ .

- (2) Les sections des fibrés vectoriels font également émerger des faisceaux. Un fibré vectoriel est un fibré  $p : X \rightarrow B$  muni d'un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$

de  $B$  et d'un espace vectoriel  $V$  tel que le pullback dans **Tops** de  $p$  le long de  $U_\alpha \hookrightarrow B$  soit isomorphe dans **Tops** /  $U$  au fibré trivial  $U \times V \rightarrow U$ . Les sections fournissent alors un faisceau  $\Gamma_p$ .

Par exemple, prenant  $M$  une variété différentielle de classe  $C^\infty$ , on a les fibrés vectoriels tangent  $p: TM \rightarrow M$  et cotangent  $q: T^*M \rightarrow M$ . Les ensembles  $\Gamma_p U$  des champs de vecteurs et  $\Gamma_q U$  des 1-formes sur un ouvert  $U \subseteq M$  définissent alors des faisceaux  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_q$  sur  $M$ .

- (3) Il serait faux de penser que tout préfaisceau séparé est un faisceau. Pour une espace topologique  $X$ , notons  $B(U) = \{f \in C(U) \mid f \text{ bornée}\}$ . Comme  $B(-)$  est un sous-foncteur de  $C(-)$ , il est clair que  $B(-)$  est séparé. Cependant, la bornitude des  $f_i$  n'assurent en aucun cas celle de  $f$ . En effet, pour  $X = ]0, 1[$  et  $(U_n = ]1/n, 1[)_{n \in \mathbb{N}}$  recouvrement de  $X$ , la famille  $(U_n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x)_{n \in \mathbb{N}}$  ne définit pas par recollement une fonction de  $B([0, 1])$ .

Afin de pouvoir généraliser la notion de faisceau plus facilement par la suite, il convient d'exprimer sa définition en termes catégoriques. Soit  $F$  un préfaisceau sur  $X$ . Pour un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $U \subseteq X$ , il est clair que

$$F(U) \xrightarrow{\left(\iota_{U_i}^U\right)_i} \prod_i F(U_i) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} U_i \\ U_i \cap U_j \end{smallmatrix}\right)_i} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j). \quad (2.1)$$

commute. Le fait pour  $F$  d'être séparé équivaut à la monomorphie de la flèche gauche. Pour être un faisceau, il reste à  $F$  à vérifier que toute famille  $(f_i)$  coïncidant sur les  $U_i \cap U_j$  définit un élément de  $F(U)$  dont les restrictions sont les  $f_i$ ; c'est-à-dire que les familles  $(f_i)$  faisant effectivement commuter la partie droite du diagramme (2.1) sont toutes atteintes par la flèche de gauche. Ainsi,  $F$  est un faisceau sur  $X$  si et seulement si le diagramme (2.1) est égaliseur pour tout ouvert  $U \subseteq X$  muni d'un recouvrement ouvert  $(U_i)$ .

On conclut cette section en définissant la catégorie des faisceaux sur un espace topologique  $X$ . Les faisceaux étant notamment des préfaisceaux, on a déjà la notion de morphismes entre faisceaux : ce sont les transformations naturelles entre les foncteurs contravariants que sont les faisceaux.

**Définition 2.1.3** (Catégorie des faisceaux). Soit  $X$  un espace topologique. La *catégorie des faisceaux sur  $X$* , notée  $\text{Sh}(X)$ , est la sous-catégorie pleine de  $\text{PSh}(\mathcal{O}(X))$  d'objets les faisceaux sur  $X$ .

## 2.2 Cribles

Les *cribles* sont la généralisation des recouvrements ouverts dans un espace topologique classique. Considérons un ouvert  $U$  d'un espace topologique  $X$ . On peut alors considérer une famille  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts tous inclus dans  $U$ . Si ce qui nous intéresse est *ce qui est couvert par les  $U_i$* , on peut raisonnablement supposer que tout ouvert  $V \subset U_i$ , pour un certain  $i \in I$ , est encore un élément de la famille  $(U_i)$ . Typiquement, étant donné un atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  d'une variété (disons topologique), l'atlas plus fin  $\{(V, \psi) \mid \exists \alpha \in A, V \subseteq U_\alpha \text{ et } \psi = \varphi_\alpha|_V\}$  définit la même structure de variété.

Ceci motive la notion de crible suivante. On rappelle que le *plongement de Yoneda* pour un objet  $C$  dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est le foncteur contravariant  $\mathbf{y}_C = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$ .

**Définition 2.2.1** (Crible). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie **petite**. Un *crible*  $S$  sur l'objet  $C$  est un sous-foncteur de  $\mathbf{y}_C$ .

Un crible sur  $C$  est donc un foncteur  $S: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  tels que pour tout objet  $D$ ,  $S(D)$  est un ensemble de flèches  $f: D \rightarrow C$ . De plus, pour  $g: E \rightarrow D$ ,  $S(g)$  est défini par précomposition de  $g$  avec les éléments de  $S(D)$  :

$$S(g): (D \xrightarrow{f} C) \mapsto (E \xrightarrow{fg} C).$$

L'ensemble<sup>1</sup>  $\{f: D \rightarrow C \mid D \in \text{Ob}\mathcal{C}\}$ , noté encore  $S$ , satisfait donc la propriété suivante : pour tout  $f: D \rightarrow C \in S$ , pour tout  $g: E \rightarrow D$  quelconque,  $fg \in S$ .

Réciproquement, un ensemble  $S = \{f: D \rightarrow C\}$  de flèches de codomaine  $C$  définit naturellement un sous-foncteur de  $\mathbf{y}_C$ , encore noté  $S$ , via

$$\begin{aligned} \forall D \in \text{Ob}\mathcal{C}, \quad S(D) &= \{f \in S \mid \text{dom}(f) = D\} \\ \forall g: E \rightarrow D, \quad S(g) &= (D \xrightarrow{f} C) \mapsto (E \xrightarrow{fg} C). \end{aligned}$$

On a alors une définition alternative de crible, moins concise mais plus à même de représenter l'intuition donnée par les ouverts.

**Définition 2.2.2** (Crible (alternative)). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie **petite**. Un crible  $S$  sur l'objet  $C$  est un sous-ensemble de  $\{f \in \text{Hom}\mathcal{C} \mid \text{cod}(f) = C\}$  clos par postcomposition, i.e.

$$\forall f: D \rightarrow C, \forall g: E \rightarrow D, \quad f \in S \implies fg \in S.$$

Remarquons que notamment  $\mathbf{y}_C$  est un crible sur  $C$  dont l'ensemble associé est précisément  $\{f \in \text{Hom}\mathcal{C} \mid \text{cod}(f) = C\}$ .

Étant donné un crible  $S$  sur un objet  $C$ , une flèche  $h: C' \rightarrow C$  *tire en arrière* le crible  $S$  en un crible  $h^*(S)$  sur l'objet  $C'$  défini par :

$$h^*(S) = \{g: D \rightarrow C' \mid hg \in S\}.$$

La terminologie *tiré en arrière* n'est pas hasardeuse. En effet, vu comme objet de la catégorie  $\widehat{\mathcal{C}}$ ,  $h^*(S)$  est le pullback de  $S \mapsto \mathbf{y}_C$  le long de  $\mathbf{y}(h)$ , i.e., plus explicitement, le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} h^*(S) & \xrightarrow{g \mapsto hg} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{y}_{C'} & \xrightarrow{\mathbf{y}(h)} & \mathbf{y}_C \end{array}$$

est cartésien. Remarquons notamment que  $f: D \rightarrow C \in S$  si et seulement si  $f^*(S) = \mathbf{y}_D$ .

Enfin, étant donné un sous-ensemble  $S \subseteq \mathbf{y}_C$  quelconque (i.e. pas forcément clos par postcomposition), on note  $\langle S \rangle$  le crible *engendré* par  $S$  et défini par :

$$\langle S \rangle = \{fg \mid f \in S, \text{cod}(g) = \text{dom}(f)\}.$$

---

1. C'en est un car  $\mathcal{C}$  est petite.

## 2.3 Topologies de Grothendieck

On a dit précédemment que la notion de crible généralise celle de recouvrement ouvert. Ce n'est pas tout à fait vrai, elle généralise seulement les *potentiels* recouvrements ouverts. Il nous faut encore dire lesquels sont considérés comme les recouvrements effectifs de notre topologie. C'est le rôle de la topologie de Grothendieck, qui choisit les cribles dignes d'intérêt, au même titre qu'une topologie classique sur  $X$  choisit les ouverts parmi le treillis  $\mathcal{P}(X)$ .

**Définition 2.3.1** (Topologie de Grothendieck). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie **petite**. Une *topologie de Grothendieck*  $J$  sur  $\mathcal{C}$  est une application qui à tout objet  $C$  associe une famille  $J(C)$  de cribles, telle que

- (i) pour tout objet  $C$ ,  $\mathbf{y}_C \in J(C)$ ,
- (ii) pour tout objet  $C$  et  $S \in J(C)$ ,  $h^*(S) \in J(D)$  pour tout  $h: D \rightarrow C$ ,
- (iii) pour tout objet  $C$  et  $S \in J(C)$ , pour tout crible  $R$  sur  $C$ , si  $h^*(R) \in J(D)$  pour tout  $h: D \rightarrow C \in S$ , alors  $R \in J(C)$ .

La condition (ii) est appelée *axiome de stabilité*, la condition (iii) *axiome de transitivité*. Gardant à l'esprit l'analogie avec une topologie classique, les trois conditions précédentes énoncent

- (i) qu'un ouvert est recouvert par l'ensemble des ouverts qu'il contient,
- (ii) qu'un recouvrement d'un ouvert couvre tout ouvert plus petit,
- (iii) qu'une famille d'ouverts couvrant tout ouvert d'un recouvrement d'un ouvert couvre ce dernier.

Il ne reste plus qu'à définir la notion d'espace topologique généralisé.

**Définition 2.3.2** (Site). Un *site* est la donnée d'un couple  $(\mathcal{C}, J)$  formé d'une catégorie  $\mathcal{C}$  petite et d'une topologie de Grothendieck  $J$  sur  $\mathcal{C}$ .

Nous allons par la suite voir quelques exemples. Mais vérifions d'abord que les topologies de Grothendieck permettent de redéfinir les topologies classiques. Soit donc  $(X, \tau)$  un espace topologique dont on note  $\mathcal{O}_\tau(X)$  le treillis des ouverts : c'est une catégorie petite (fine) sur laquelle on va poser une topologie de Grothendieck, dite *topologie ouverte*. Définissons l'application  $J$  comme suit :

$$\forall U \in \tau, \quad J(U) = \left\{ \mathcal{F} \subseteq \mathbf{y}_U \mid \bigcup_{i \in \mathcal{F}} \text{dom}(i) = U \right\}.$$

Ceci définit une topologie de Grothendieck. En effet, pour tout  $U \in \tau$ ,  $\mathbf{y}_U$  est l'ensemble des (inclusions des) ouverts contenus dans  $U$  :  $\bigcup_{V \subseteq U, V \in \tau} V = U$ . Pour  $S = \{U_\alpha \rightarrow U\}_{\alpha \in A} \in J(U)$ , et  $i: V \rightarrow U$ , on a

$$i^*(S) = \{V \cap U_\alpha \rightarrow V\}_{\alpha \in A}.$$

Or  $\bigcup_\alpha (V \cap U_\alpha) = V \cap U = V$ . Enfin, pour  $S = \{U_\alpha \rightarrow U\}_{\alpha \in A} \in J(U)$  et  $R = \{U'_\beta \rightarrow U\}_{\beta \in B}$  crible d'ouverts inclus dans  $U$  satisfaisant

$$\forall U_\alpha \rightarrow U, \quad \bigcup_{\beta \in B} (U_\alpha \cap U'_\beta) = U_\alpha,$$

alors  $\bigcup_\beta U'_\beta = (\bigcup_\beta U'_\beta) \cap (\bigcup_\alpha U_\alpha) = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap \bigcup_\beta U'_\beta) = \bigcup_\alpha U_\alpha = U$ , qui montre  $R \in J(U)$ .

Exemple(s) 2.3.3.

- (1) La topologie *triviale* sur une catégorie  $\mathcal{C}$  petite est définie par  $J(C) = \{\mathbf{y}_C\}$  pour tout  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ . C'est l'analogie de la topologie grossière dans le cadre classique : elle est incluse dans toute autre topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$ .

Attention, on pourrait croire que, dans le cas de  $\mathcal{C} = \mathcal{O}(X) = \{\emptyset, X\}$  pour un espace topologique  $X$  grossier, la topologie triviale  $J_{\text{tr}}$  sur  $\mathcal{C}$  coïncide avec la topologie ouverte  $J_{\mathcal{O}}$ . Il n'en est rien : la topologie ouverte assure que la famille vide couvre  $\emptyset$ , i.e.  $J_{\mathcal{O}}(\emptyset) = \{\emptyset, \mathbf{y}_{\emptyset}\}$ , alors que par définition  $J_{\text{tr}}(\emptyset) = \{\mathbf{y}_{\emptyset}\}$ ; d'où il résulte  $J_{\text{tr}} \subsetneq J_{\mathcal{O}}$ .

- (2) On aimerait de même définir un analogue à la topologie discrète en décrétant tout crible comme couvrant :

$$\forall C \in \text{Ob}\mathcal{C}, \quad J(C) = \{S \rhd \mathbf{y}_C \mid S \neq \emptyset\}.$$

Mais alors l'axiome de stabilité (ii) suppose que tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & D \\ & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

se complète en un carré commutatif (non nécessairement cartésien)

$$\begin{array}{ccc} \star & \dashrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{h} & C. \end{array}$$

(Il suffit de prendre le crible  $\langle f \rangle$  engendré par  $\{f\}$  et l'application  $h$  et d'appliquer l'axiome de stabilité en gardant à l'esprit que la collection  $J(E)$  est non vide puisque contient au moins  $\mathbf{y}_E$ ).

Une catégorie satisfaisant cette condition de complétion des diagrammes  $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$  en carré commutatif admet donc la topologie définie plus haut. Cette topologie est dite *atomique*.

- (3) Cet exemple est fondamental pour la suite de ce document car cette topologie de Grothendieck servira à construire le modèle de Cohen violant l'hypothèse du continu. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie petite. On y définit l'application  $J$  comme suit : pour tout objet  $C$ ,

$$\forall S \rhd \mathbf{y}_C, \quad S \in J(C) \iff \forall f: D \rightarrow C, \exists g: E \rightarrow D, fg \in S.$$

$J$  définit une topologie de Grothendieck sur  $\mathcal{C}$ . En effet,

- tout  $f: D \rightarrow C$  est élément de  $\mathbf{y}_C$ , et donc prenant  $g = 1_D$ , on a  $fg = f \in \mathbf{y}_C$ .  $J$  satisfait donc (i).
- pour  $S \in J(C)$  et  $h: D \rightarrow C$ , il s'agit de vérifier que pour toute fonction  $f: E \rightarrow D$ , il existe une flèche  $g: F \rightarrow E$  tel que  $fg \in h^*(S)$ . Or, comme  $S \in J(C)$ , pour  $hf: E \rightarrow C \in S$  il existe en effet un  $g: F \rightarrow E$  tel que  $hfg \in S$ .

– pour  $S \in J(C)$  et  $R$  crible sur  $C$  satisfaisant

$$\forall h: D \rightarrow C \in S, \forall f: E \rightarrow D, \exists g: F \rightarrow E, \quad fg \in h^*(R),$$

on cherche à montrer  $R \in J(C)$ . Soit donc  $f: D \rightarrow C$ , alors il existe  $g: E \rightarrow D$  tel que  $fg \in S$ . Appliquant la propriété ci-dessus avec  $h = fs$ , on trouve pour  $g: E \rightarrow D$  un  $k: F \rightarrow E$  tel que  $gk \in (fs)^*(R)$ , i.e.  $fsgk \in R$  : l'existence de  $sgk$  pour tout  $f$  conclut alors  $R \in J(C)$ .

La topologie de Grothendieck  $J$  est appelée *topologie dense* ou  $\neg\neg$ -*topologie* sur  $\mathcal{C}$ . La terminologie  $\neg\neg$  vient de l'application qu'on en fera en logique, alors que la terminologie *dense* vient de son interprétation quand  $\mathcal{C}$  est le treillis  $\mathcal{O}(X)$  d'un espace topologique. En effet, dans le cas d'un ensemble partiellement ordonné  $(P, <)$ , pour un élément  $p \in P$ , un sous-ensemble  $D \subseteq \{q \in P \mid q \leq p\}$  est dit *dense* sous  $p$  si pour tout  $r \leq p$ , on a un  $q \in D$  tel que  $q \leq r$ . Identifiant les flèches et leurs domaines dans  $P$ , les cribles denses sont exactement les cribles couvrant pour la topologie dense  $J$ . Dans le cas  $P = \mathcal{O}(X) \setminus \{\emptyset\}$ , les parties denses sous  $U$  sont les ensembles d'ouverts  $\{U_\alpha \subseteq U\}$  telles que pour tout ouvert  $V \subseteq U$ , il existe  $\alpha$  tel que  $U_\alpha \subseteq V$ . Ainsi, un ouvert  $U$  est dense (au sens topologique) dans  $X$  si et seulement si le crible engendré  $\langle U \rangle = \{U' \subseteq U\}$  est une partie dense (au sens ci-dessus) de  $\mathcal{O}(X) \setminus \{\emptyset\}$ .

## 2.4 Topos de Grothendieck

On définit dans cette section la notion fondamentale de topos de Grothendieck, élément de base de nos constructions futures. Pour cela, on a d'abord besoin de définir les faisceaux sur un site. On a déjà fait l'effort de définir la notion classique de faisceau en terme catégorique. Il nous suffit donc ici d'adapter la définition au cadre des topologies de Grothendieck.

**Définition 2.4.1** (Faisceau sur un site). Soit  $(\mathcal{C}, J)$  un site. Un faisceau  $F$  sur le site  $(\mathcal{C}, J)$  est un préfaisceau  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  tel que pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et tout crible  $S \in J(C)$ , le diagramme

$$F(C) \xrightarrow{e} \prod_{f \in S} F(\text{dom}(f)) \xrightarrow[q]{p} \prod_{f \in S, g \in f^*(S)} F(\text{dom}(g))$$

soit un égaliseur pour

$$\begin{aligned} e &= (Ff)_{f \in S} \\ p &= (Fg)_{g \in f^*(S), f \in S} \\ q &= (1_{F(fg)})_{g \in f^*(S), f \in S}. \end{aligned}$$

*Remarque.*

- (1) L'application  $q$  est bien définie car pour  $g \in f^*(S)$ , on a  $fg \in S$  : ainsi,  $F(\text{dom}(g))$  apparaît déjà dans le produit du milieu.
- (2) L'écriture  $f^*(S)$  a été adopté pour plus de concision, mais comme  $f \in S$ , on a bien entendu  $f^*(S) = \{g \in \text{Hom } \mathcal{C} \mid \text{cod}(g) = \text{dom}(f)\}$ .

Les objets images par  $F$  étant ici des ensembles, on peut décrire plus concrètement la condition sur le préfaisceau  $F$  à être un faisceau. Pour un objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et un crible  $S \in J(C)$ , on appelle *famille coïncidante pour  $S$  d'éléments de  $F$*  la donnée d'un élément  $x_f \in F(D)$  pour chaque  $f: D \rightarrow C \in S$  telle que

$$x_{fg} = Fg(x_f) \quad \forall g: E \rightarrow D.$$

Pour une telle famille coïncidante, nommons *amalgamation* tout élément  $x \in F(C)$  tel que  $x_f = Ff(x)$  pour tout  $f \in S$ . La condition sur  $F$  à être un faisceau se traduit alors comme suit : pour tout crible  $S$  couvrant un objet  $C$ , toute famille coïncidante pour  $S$  d'éléments de  $F$  admet une unique amalgamation.

Prenons ici conscience du fait suivant : les cribles sont également des préfaisceaux. En effet, un crible  $S$  sur un objet  $C$  est un sous-foncteur de  $\mathbf{y}_C = \text{Hom}(-, C)$ . Exploitant cela, on peut donner une caractérisation des faisceaux parfois utile.

**Proposition 2.4.2.** *Soit  $(\mathcal{C}, J)$  un site. Un préfaisceau  $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$  est un faisceau si et seulement si pour tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , tout  $S \in J(C)$  et tout morphisme de préfaisceau  $\alpha: S \rightarrow F$ , il existe un unique morphisme  $\tilde{\alpha}: \mathbf{y}_C \rightarrow F$  tel que*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & F \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \\ \mathbf{y}_C & & \end{array}$$

*commute.*

*Preuve.* Un morphisme  $\alpha: S \rightarrow F$  de préfaisceau entre un crible  $S$  et  $F$  est exactement la donnée d'une famille coïncidante. Plus exactement, la famille coïncidante est  $(\alpha_{\text{dom}(f)}(f))_{f \in S}$ . Notons  $x \in FC$  l'unique amalgamation correspondante. Alors la famille

$$\tilde{\alpha}_D: \text{Hom}(D, C) \rightarrow FD, f \mapsto Ff(x)$$

forme un morphisme  $\tilde{\alpha}$  de préfaisceau factorisant  $\alpha$ .

Réciproquement, soit  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $S \in J(C)$  un crible couvrant. Soit alors une famille coïncidante  $(x_f)_{f \in S}$  pour  $S$  d'éléments de  $F$ . La famille des flèches

$$\alpha_D: SD \rightarrow FD, f \mapsto x_f$$

définit alors un morphisme  $\alpha$  de préfaisceau. Par hypothèse,  $\alpha$  se factorise : il existe un unique  $\tilde{\alpha}$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & F \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \\ \mathbf{y}_C & & \end{array}$$

Une amalgamation de  $(x_f)$  est alors exactement un élément  $x \in FC$  tel que pour tout  $f: D \rightarrow C \in S$ ,  $Ff(x) = \alpha_D(f) = \tilde{\alpha}_D(f)$ . Il suffit de rappeler que  $\mathbf{y}_C(f) = \{h \mapsto hf\}$  pour voir que  $\tilde{\alpha}_C(1_C)$  est une amalgamation. Son unicité vient de celle  $\tilde{\alpha}$  (chaque amalgamation définit une factorisation de  $\alpha$ ).  $\square$

*Exemple(s) 2.4.3.*

- (1) Proposition 2.4.2 montre que toute petite catégorie  $\mathcal{C}$  muni de la topologie de Grothendieck triviale  $J$  (cf. Section 2.3) forme un site  $(\mathcal{C}, J)$  pour lequel tout préfaisceau est un faisceau. En effet, pour  $F \in \text{Ob } \widehat{\mathcal{C}}$  et  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , le seul crible de  $J(C)$  est  $\mathbf{y}_C$  : tout morphisme  $\mathbf{y}_C \rightarrow F$  se factorise trivialement en un morphisme  $\mathbf{y}_C \rightarrow F$ .
- (2) Les faisceaux sur un espace topologique classique  $X$  sont des faisceaux sur le site  $(\mathcal{O}(X), J)$  pour  $J$  la topologie ouverte définie en Section 2.3 (et ce sont les seuls). Cela est évident grâce à la définition diagrammatique de faisceau classique vue en Section 2.1.

Comme dans le cas des faisceaux classiques, les préfaisceaux sous-jacents aux faisceaux définissent la notion de morphismes entre faisceaux. On définit donc la catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  des faisceaux sur le site  $(\mathcal{C}, J)$  comme la sous-catégorie pleine de  $\widehat{\mathcal{C}}$  d'objets les faisceaux. Il s'en suit la définition de topos de Grothendieck.

**Définition 2.4.4** (Topos de Grothendieck). Un *topos de Grothendieck* est une catégorie équivalente à  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  pour un site  $(\mathcal{C}, J)$ .

Le reste du chapitre est dédié à montrer que les topos de Grothendieck sont bien des topos élémentaires au sens de Définition 1.5.7. En effet, bien que ces objets surviennent dans un cadre topologico-géométrique, ils ont toutes les propriétés requises pour être des univers de définition des mathématiques.

Avant cela, commençons par quelques remarques et exemples sur les topos de Grothendieck.

*Remarque* (Attention!). Pour un topos de Grothendieck  $\mathcal{E}$ , il peut y avoir plusieurs sites  $(\mathcal{C}, J)$  tels que  $\mathcal{E} \simeq \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ .

La raison en est qu'on peut même avoir  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J) \simeq \text{Sh}(\mathcal{C}', J')$  pour  $\mathcal{C} \not\cong \mathcal{C}'$ . Prenons par exemple la catégorie ordinaire  $\mathbf{1}$  (unique objet, unique flèche identité) équipé de la topologie triviale  $J_{\text{tr}}$  et  $\mathcal{O}(X) = \{\emptyset, X\}$ , le treillis des ouverts d'un espace topologique  $X$  grossier, muni de la topologie ouverte  $J_{\mathcal{O}}$ . D'une part, on sait déjà

$$\text{Sh}(\mathbf{1}, J_{\text{tr}}) = \widehat{\mathbf{1}} \simeq \mathbf{Sets}.$$

D'autre part, un faisceau sur  $(\mathcal{O}(X), J_{\mathcal{O}})$  est un faisceau classique sur  $X : \{X\}$  étant le seul recouvrement ouvert de  $X$ , la condition sur un préfaisceau  $F$  à être un faisceau de résumé à satisfaire la propriété de recollement sur l'unique recouvrement ouvert non trivial de  $\emptyset$ , le recouvrement par la famille vide; la propriété de recollement stipule alors que  $F\emptyset$  est un singleton. Ainsi, un faisceau sur  $X$  se résume au choix arbitraire de  $F X$ , autrement dit

$$\text{Sh}(\mathcal{O}(X), J_{\mathcal{O}}) \simeq \mathbf{Sets} \simeq \text{Sh}(\mathbf{1}, J_{\text{tr}}).$$

Notons que ce qui précèdent se généralise facilement à :  $\text{Sh}(\mathbf{n}, J_{\text{tr}}) \simeq \text{Sh}(S_n)$  où  $\mathbf{n}$  est la catégorie ordinaire définie en Section 1.2 et  $S_n$  le  $n$ -ième espace de Serpinski, i.e. l'espace  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  d'ouverts les  $\{0, 1, \dots, k\}$ ,  $k < n$ .

*Exemple(s) 2.4.5.* 1. Toute catégorie  $\mathcal{C}$  petite munie de la topologie triviale forme un site sur lequel faisceaux et préfaisceaux sont les même, faisant de  $\widehat{\mathcal{C}}$  un topos de Grothendieck.



2. La remarque précédente a mis en exergue le fait que **Sets** est un topos de Grothendieck.
3. Plus généralement, la catégorie **Sets**<sup>**n**</sup> des suites d'ensembles

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1}$$

dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \xrightarrow{f_1} & A_1 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_{n-1}} & A_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \downarrow \\ B_0 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} \end{array}$$

forme un topos de Grothendieck. En effet, comme  $\mathbf{n} \simeq \mathbf{n}^{\text{op}}$ , on a  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{n}} \simeq \widehat{\mathbf{n}}$  qu'on sait déjà être un topos de Grothendieck.

4. Tout  $\text{Sh}(X)$ , pour  $X$  espace topologique, est un topos de Grothendieck : c'est  $\text{Sh}(\mathcal{O}(X), J_{\mathcal{O}})$ .

## 2.5 Faisceau associé à un préfaisceau

Soit  $(\mathcal{C}, J)$  un site. Par définition,  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  est la sous-catégorie pleine de  $\widehat{\mathcal{C}}$  d'objets les faisceaux sur  $(\mathcal{C}, J)$ . Ainsi, le foncteur inclusion

$$i: \text{Sh}(\mathcal{C}, J) \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

est pleinement fidèle. Le but de cette section est de lui construire un adjoint à gauche

$$a: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J).$$

Moralement,  $a$  est un moyen de *pousser* canoniquement les préfaisceaux dans les faisceaux. L'opération  $a$ , dite de *faisceautisation*, nous sera très utile dans l'obtention d'éléments pathologiques dans le topos de Cohen. Elle permettra principalement de ramener des phénomènes survenants dans un contexte intuitionniste à un contexte classique.

Il convient pour cela de faire l'observation suivante, motivée par le préfaisceau des fonctions continues à valeurs réelles bornées (cf. Section 2.1) : il y a des préfaisceaux  $F$  sur le  $(\mathcal{C}, J)$  dont tous les diagrammes (cf. Définition 2.4.1)

$$F(C) \xrightarrow{e} \prod_{f \in S} F(\text{dom}(f)) \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \prod_{f \in S, g \in f^*(S)} F(\text{dom}(g))$$

ne sont pas égalisant, mais respecte tout de même l'injectivité de la flèche  $e$ . Plus concrètement, toute famille coïncidante pour un crible couvrant admet au plus une amalgamation. On dit qu'un tel  $F$  est *séparé* sur le site  $(\mathcal{C}, J)$ . Les faisceaux sont bien entendu des cas particuliers de préfaisceaux séparés. Les préfaisceaux séparés sont en quelque sorte à *mi-chemin* entre les préfaisceaux quelconques et les faisceaux. Cette observation nous permet d'opérer en deux temps dans la construction de  $a$  : étant donné un préfaisceau quelconque, lui associer un

préfaisceau séparé (unicité des amalgamations), puis un faisceau (existence des amalgamations). Étonnamment, un unique procédé permet ces deux opérations.

Rappelons que pour  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $J(C)$  est un sous-ensemble<sup>2</sup> de  $\text{Sub}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_C)$ . Soit  $F$  préfaisceau sur  $\mathcal{C}$ . Considérant  $J(C)$  comme ensemble partiellement ordonné (et donc comme catégorie), posons

$$F_C: J(C)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}, S \mapsto \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(S, F).$$

C'est évidemment un foncteur puisqu'un la restriction à la sous-catégorie  $J(C)$  de  $\widehat{\mathcal{C}}$  du foncteur de Yoneda  $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(-, F)$ . Le lemme de Yoneda donne même l'isomorphisme

$$F_C(\mathbf{y}_C) \simeq F(C)$$

naturel en  $C$  qu'on explicite très facilement en terme de familles coïncidentes comme  $(x_f)_{f \in \mathbf{y}_C} \mapsto x_{1_C}$ . On a également immédiatement que  $F$  est séparé (respectivement un faisceau) si et seulement si pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $S \in J(C)$ ,  $F(C) \simeq F_C(\mathbf{y}_C) \rightarrow F_C(S)$  est un monomorphisme (respectivement isomorphisme).

Considérant le foncteur  $F_C$  comme un diagramme sur la catégorie  $J(C)^{\text{op}}$ , on pose

$$F^+(C) = \varinjlim_{J(C)^{\text{op}}} F_C.$$

Cela définit une application  $F^+$  sur les objets de  $\mathcal{C}$  à valeurs dans  $\mathbf{Sets}$ . On peut étendre naturellement cette définition aux flèches de  $\mathcal{C}$  pour en faire un préfaisceau : une flèche  $h: C' \rightarrow C$  de  $\mathcal{C}$  donne lieu au foncteur  $h^*: J(C) \rightarrow J(C')$ , et à la transformation naturelle  $\mathfrak{h}: F_C \rightarrow F_{C'} \circ h^*$  définie par

$$\mathfrak{h}_S: (S \xrightarrow{\alpha} F) \mapsto (h^* S \xrightarrow{g^* \alpha} S \xrightarrow{\alpha} F), \quad S \in J(C),$$

et ainsi, par les propriétés des colimites (voir par exemple [Sta13, Tag 002K]), définit une flèche

$$F^+(h): F^+(C) \rightarrow F^+(C')$$

telle que commutent les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F_C(S) & \longrightarrow & F^+(C) \\ \mathfrak{h}_S \downarrow & & \downarrow F^+h \\ F_{C'}(h^*S) & \longrightarrow & F^+(C') \end{array} \quad S \in J(C). \quad (2.2)$$

Il est alors immédiat que  $F^+: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  respecte la composition et les identités, en faisant un préfaisceau.

Remarquons que pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $S \in J(C)$ , la définition même de  $F_C$  fait de  $F_C(S)$  l'égaliseur dans le diagramme

$$F_C(S) \xrightarrow{e_S} \prod_{f \in S} F(\text{dom}(f)) \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \prod_{f \in S, g \in f^*(S)} F(\text{dom}(g)),$$

---

2.  $\mathcal{C}$  étant petite,  $\widehat{\mathcal{C}}$  est well-powered.

où  $e_S$  est l'application  $\alpha \mapsto (\alpha_{\text{dom}(f)}(f))_{f \in S}$ . La propriété universelle d'un égaliseur fournit une flèche  $F(C) \rightarrow F_C(S)$  que l'on peut composer avec la flèche  $F_C(S) \rightarrow F^+(C)$  issue du cône de sommet  $F^+(C)$ , afin d'établir

$$\eta_C^F : F(C) \rightarrow F_C(S) \rightarrow F^+(C).$$

Comme la notation le suggère,  $\eta_C^F$  ne dépend pas du crible couvrant  $S$  : pour tout  $R \in J(C)$  raffinement de  $S$  (i.e.  $R \subseteq S$ ), on a évidemment que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} FC & \longrightarrow & F_C S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & F_C R \end{array} \quad (h: D \rightarrow C, S \in J(C))$$

commute ; deux cribles couvrant admettent leur intersection comme raffinement commun, ce qui conclut. De la commutativité (triviale) du diagramme

$$\begin{array}{ccc} FC & \longrightarrow & F_C S \\ Fh \downarrow & & \downarrow h_S \\ FD & \longrightarrow & F_D(h^*(S)) \end{array}$$

et de Eq. (2.2), on déduit la naturalité de la collection  $\eta^F = (\eta_C^F)_{C \in \text{Ob } \mathcal{C}}$ . On a ainsi un morphisme canonique de préfaisceau

$$\eta^F : F \rightarrow F^+.$$

**Lemme 2.5.1.** (i) Si  $\eta^F$  monomorphisme, alors  $F$  est séparé.

(ii) Si  $\eta^F$  isomorphisme, alors  $F$  est un faisceau.

*Preuve.* (i). Si  $\eta^F$  monomorphisme, pour tout objet  $C$ ,  $FC \rightarrow F^+C$  également, et donc nécessairement pour tout  $S$  couvrant  $C$ , la première flèche de

$$FC \rightarrow F_C S \rightarrow F^+C$$

l'est aussi.

(ii). Si  $F \simeq F^+$ , pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $FC \simeq F^+C$  et ainsi pour tout  $R, S \in J(C)$ , on a une flèche  $F_C R \rightarrow FC \rightarrow F_C S$  faisant de  $S$  le sommet d'un cocône sur  $F_C$ , montrant donc  $F_C S \simeq FC$  pour tout crible  $S$  couvrant  $C$ . Ainsi,  $F$  est un faisceau.  $\square$

*Remarque.* La réciproque de (ii) est trivialement vraie : si  $F$  faisceau,  $F_C(S) \simeq F(C)$  pour tout objet  $C$  et crible  $S$  couvrant  $C$  ; la colimite du diagramme constant  $F_C$  est donc  $F(C)$ . On a ainsi

$$F \xrightarrow{\eta^F} F^+.$$

La réciproque de (i) est également vraie et sera établie plus tard.

On a jusqu'ici défini une opération  $F \mapsto F^+$  sur les objets de  $\widehat{\mathcal{C}}$ . On l'étend de manière évidente aux flèches  $\alpha: F \rightarrow G: \alpha_C: FC \rightarrow GC$  induit un morphisme  $F_C \rightarrow G_C$  de diagrammes sur  $J(C)^{\text{op}}$  qui définit ainsi  $\alpha_C^+: F^+C \rightarrow G^+C$  ([Sta13, Tag 002K]) faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F_C S & \longrightarrow & F^+ C \\ \downarrow & & \downarrow \alpha_C^+ \\ G_C S & \longrightarrow & G^+ C \end{array} \quad (S \in J(C)).$$

La composition et les identités sont trivialement respectées, faisant de  $\cdot^+ : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$  un endofoncteur.

**Lemme 2.5.2.** *Soit  $\varphi: F \rightarrow G$  un morphisme de préfaisceau. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\eta^F} & F^+ \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^+ \\ G & \xrightarrow{\eta^G} & G^+ \end{array}$$

*commute.*

*Preuve.* Pour tout objet  $C$  et crible couvrant  $S$ , le carré de gauche et de droite dans

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & F_C S & \longrightarrow & F^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G_C S & \longrightarrow & G^+ \end{array}$$

commutent par définition de  $\eta^{\cdot}$  et de  $\varphi^+$ . □

*Remarque.* Une autre façon d'énoncer le lemme précédent est : l'opération

$$\widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}^2, F \mapsto \eta^F$$

est fonctorielle.

Le lemme suivant montre que  $F^+$  est en quelque sorte *universel* relativement à  $F$ .

**Lemme 2.5.3.** *Soit  $F$  un préfaisceau. Pour tout faisceau  $G$  et morphisme  $\varphi: F \rightarrow G$  de préfaisceau, il existe un unique morphisme  $\tilde{\varphi}: F^+ \rightarrow G$  tel que*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\eta} & F^+ \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & G \end{array}$$

*commute.*

*Preuve.* Par le lemme précédent on a

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\eta^F} & F^+ \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^+ \\ G & \xrightarrow{\eta^G} & G^+. \end{array}$$

Or  $G$  est un faisceau, donc  $\eta^G$  est un isomorphisme. Notant  $\tilde{\varphi} = \eta^{G^{-1}} \varphi^+$ , on a l'existence du lemme. L'unicité vient de ce que  $G$  est un faisceau : pour tout objet  $C$  et crible couvrant  $S$ ,  $\varphi_C$  induit une application  $F_C S \rightarrow G_C S$  (on transforme les familles coïncidentes  $(x_f)_{f \in S}$  d'élément de  $F$  en familles coïncidentes  $(\varphi_{\text{dom}(f)}(x_f))_{f \in S}$  d'élément de  $G$ ) faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} FC & \longrightarrow & F_C S \\ & \searrow \varphi_C & \downarrow \\ & & G_C S. \end{array} \quad (2.3)$$

Or  $G_C S \simeq GC$  car  $G$  faisceau. Ainsi,  $GC$  est le sommet d'un cocône sur  $FC$ , et la propriété universel de la colimite  $F^+C$  assure qu'il existe un unique morphisme de cocône  $F^+C \rightarrow GC$ , i.e., par Eq. (2.3), une application  $F^+C \rightarrow GC$  tel que

$$\begin{array}{ccc} FC & \longrightarrow & F^+C \\ & \searrow \varphi_C & \downarrow \\ & & GC \end{array}$$

commute. Ayant déjà une telle application  $\tilde{\varphi}_C$ , cela montre son unicité.  $\square$

On a jusque maintenant fait abstraction du fait que  $F^+$  est un préfaisceau *en ensemble*. Pour mieux comprendre sa construction, décrivons un peu les éléments de ses images. Tout d'abord, pour un objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , les éléments de  $F_C S$  sont les familles coïncidentes pour le crible couvrant  $S$  (comme expliqué dans la preuve de Proposition 2.4.2). On en prend la colimite sur l'ensemble ordonné des cribles couvrant  $C$  (avec les inclusions inversées). Or une famille coïncidente pour  $S \in J(C)$  l'est pour tout crible  $R \twoheadrightarrow S$  couvrant encore  $C$  : l'application image  $F_C S \rightarrow F_C R$  est donc juste

$$(x_f)_{f \in S} \mapsto (x_f)_{f \in R}.$$

Dans **Sets**, on sait calculer un représentant d'une colimite comme un quotient, qui nous permet ici de décrire

$$F^+(C) \simeq \{[(x_f)_{f \in S}]_{\sim} \mid S \in J(C)\},$$

où  $\mathbf{x} = (x_f)_{f \in S} \sim (x'_{f'})_{f' \in S'} = \mathbf{x}'$  si et seulement s'il existe un crible  $R$  couvrant  $C$  avec  $R \twoheadrightarrow S$ ,  $R \twoheadrightarrow S'$  et  $F_C(R \twoheadrightarrow S)(\mathbf{x}) = F_C(R \twoheadrightarrow S')(\mathbf{x}')$ . Moins formellement, les éléments de  $F^+(C)$  sont les classes d'équivalences des familles coïncidentes pour tout recouvrement de  $C$  sous la relation « deux familles sont

équivalentes quand elles sont égales sur un recouvrement plus fin commun à leur domaine d'indexation ». L'application  $F^+h: F^+(C) \rightarrow F^+(C')$  induite par  $h: C' \rightarrow C$  est alors, dans cette description, donnée par

$$[(x_f)_{f \in S}] \mapsto [(x_{hg})_{g \in h^*S}].$$

L'action de  $\cdot^+$  sur les flèches de  $\widehat{\mathcal{C}}$  s'écrit pour tout morphisme  $\alpha: F \rightarrow G$  de préfaisceau, et tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,

$$\alpha_C^+: F^+(C) \rightarrow G^+(C), [(x_f)_{f \in S}] \mapsto [(\alpha_c(x_f))_{f \in S}],$$

On peut aussi décrire le morphisme  $\eta^F: F \rightarrow F^+$  de préfaisceau : pour tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,

$$\eta_C: F(C) \rightarrow F^+(C), x \mapsto [(Ff(x))_{f \in \mathbf{y}_C}].$$

(Il suffit de reprendre la construction  $FC \rightarrow F_C S \rightarrow F^+C$  avec  $S = \mathbf{y}_C$ .)

**Lemme 2.5.4.** *Soient  $(\mathcal{C}, J)$  un site et  $F$  un préfaisceau sur ce site.*

- (i)  $F^+$  est séparé.
- (ii) Si  $F$  est séparé, alors  $F^+$  est un faisceau.

*Preuve.* Commençons par (i). Soit  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $S \in J(C)$ . Il s'agit de montrer que pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F^+(C)$ , si  $F^+h(\mathbf{x}) = F^+h(\mathbf{y})$  pour tout  $h: D \rightarrow C \in S$ , alors  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Par définition,  $\mathbf{x} = [(x_f)_{f \in R}]$ , respectivement  $\mathbf{y} = [(y_g)_{g \in T}]$ , pour une famille coïncidante pour  $S$ , respectivement  $R$ , d'éléments de  $F$ . L'hypothèse stipule alors qu'il existe  $V_h \in J(D)$  pour tout  $h: D \rightarrow C \in S$  tel que

$$V_h \subseteq h^*(R) \cap h^*(T) \quad \text{et} \quad \forall k \in V_h, x_{hk} = y_{hk}.$$

L'axiome de transitivité (cf. Définition 2.3.1 (iii)) des topologies de Grothendieck assure que  $V = \{hk \mid h \in S, k \in V_h\}$  est un crible couvrant  $C$ . De plus, par définition,  $V \subseteq R \cap T$  et les flèches  $k \in V$  satisfont  $x_k = y_k$ . Autrement dit  $V$  est un raffinement de  $R$  et  $T$  qui assure  $(x_k)_{k \in V} \sim (y_k)_{k \in V}$ , i.e.  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Montrons maintenant (ii). Soient  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , et  $(\mathbf{x}_f)_{f \in S}$  une famille coïncidante pour  $S$  couvrant  $C$  d'éléments de  $F^+$ . On sait que cette famille a au plus une amalgamation (par séparation de  $F^+$ ) ; il suffit donc de montrer qu'elle en admet au moins une.

Or, pour tout  $f: D \rightarrow C \in S$ ,  $\mathbf{x}_f$  est élément de  $F^+(D)$ . D'où une famille coïncidante  $(x_{g,f})_{g \in R_f}$  pour  $R_f \in J(D)$  d'éléments de  $F$  telle que

$$\mathbf{x}_f = [(x_{g,f})_{g \in R_f}].$$

De plus, comme  $(\mathbf{x}_f)$  est coïncidante, on a pour tout  $h: D' \rightarrow D$ ,  $\mathbf{x}_{fh} = F^+h(\mathbf{x}_f)$ . C'est-à-dire qu'il existe un raffinement  $T_{f,h} \subseteq R_{fh} \cap h^*(R_f)$  tel que

$$x_{fh,g} = x_{f,hg} \quad \forall g \in T_{f,h}.$$

Posons le crible  $Q = \{fg \mid f \in S, g \in R_f\}$ . L'axiome de transitivité des topologies de Grothendieck (cf. Définition 2.3.1 (iii)) assure que  $Q$  couvre  $C$ . On peut alors définir  $\mathbf{y} = [(y_{fg})_{fg \in Q}]$  où

$$y_{fg} = x_{f,g},$$

donnant une amalgamation de  $(\mathbf{x}_f)$  : si  $f: D \rightarrow C \in S$ ,

$$F^+ f(\mathbf{y}) = [(y_{fh})_{h \in f^*(Q)}] = [(y_{fh})_{h \in R_f}] = \mathbf{x}_f,$$

où l'égalité du milieu est due à  $R_f \subseteq f^*(Q)$ .

Il reste tout de même à vérifier la bonne définition de  $\mathbf{y}$  : si  $fg = f'g'$  avec  $f, f' \in S$ ,  $g \in R_f, g' \in R_{f'}$ , on a pour tout  $k \in T_{f,h} \cap T_{f',h'}$ ,

$$Fk(x_{f,g}) = x_{f,gk} = x_{fg,k} = x_{f'g',k} = x_{f',g'k} = Fk(x_{f',g'});$$

par séparation de  $F$ ,  $x_{f,g} = x_{f',g'}$  unique en tant qu'amalgamation de  $(x_{f,gk})_k$ .  $\square$

Combinant les deux résultats du lemme précédent, il suit que pour tout préfaisceau  $F$ ,  $(F^+)^+$  est un faisceau.

**Définition 2.5.5** (Foncteur faisceau associé). Le foncteur *faisceau associé* (ou de *faisceautisation*) est le foncteur

$$a = {}^+ \circ {}^+ : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J).$$

**Proposition 2.5.6.** La paire de foncteur  $(i, a)$  forme une adjonction  $a \dashv i$ .

*Preuve.* Pour tout préfaisceau  $F$  et faisceau  $G$ , il s'agit vérifier l'équipotence de

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(F, G) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathcal{C}, J)}(a(F), G).$$

Par définition même de  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ , les morphismes de faisceaux de  $a(F)$  à  $G$  sont les morphismes de préfaisceaux de  $a(F)$  à  $G$ .

Or, Lemme 2.5.3 appliqué deux fois consécutivement montre que pour tout morphisme  $\varphi: F \rightarrow G$ , il existe un unique morphisme  $\bar{\varphi}: a(F) \rightarrow G$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\eta^{F^+} \eta^F} & a(F) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G. \end{array}$$

Ceci définit un application

$$\text{Hom}(F, G) \rightarrow \text{Hom}(a(F), G), \quad \varphi \mapsto \bar{\varphi},$$

d'inverse évident

$$\text{Hom}(a(F), G) \rightarrow \text{Hom}(F, G), \quad \psi \mapsto \psi \eta^{F^+} \eta^F.$$

$\square$

*Remarque.* L'unité  $\eta$  de l'adjonction  $a \dashv i$  est la transformation naturelle

$$(\eta^{F^+} \eta^F)_{F \in \widehat{\mathcal{C}}}: 1_{\widehat{\mathcal{C}}} \rightarrow i \circ a.$$

Rappelons que pour un faisceau  $G$ , on a un isomorphisme de (pré)faisceaux  $\eta^G: G \simeq G^+$ . Appliquant une fois de plus le résultat à  $G^+$ , la counité

$$\varepsilon = \left( (\eta^{G^+} \eta^G)^{-1} \right)_{G \in \text{Sh}(\mathcal{C}, J)} : a \circ i \rightarrow 1_{\text{Sh}(\mathcal{C}, J)}$$

réalise un isomorphisme naturel de  $a \circ i$  vers le foncteur identité de la catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ .

Comme adjoint à droite,  $i$  préserve les limites. Comme adjoint à gauche,  $a$  préserve les colimites. Comme  $\widehat{\mathcal{C}}$  a toutes les limites et colimites (**Sets** les ayant et les (co)limites d'une catégorie de foncteurs étant calculées point par point),  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  également.

**Corollaire 2.5.7.** *Soit  $(\mathcal{C}, J)$  un site. La catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  est complète et cocomplète.*

On conclut cette section par un lemme technique.

**Lemme 2.5.8.** *Le foncteur de faisceautisation  $a$  est exact à gauche, i.e. préserve les limites finies.*

*Preuve.* Il suffit de montrer que  $\cdot^+$  est exact à gauche. Pour  $F$  préfaisceau et objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , on a par définition  $F_C S = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(S, F)$  pour tout crible  $S$ . Le foncteur  $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(S, -)$  est exact à gauche (il préserve même toute petite limite) et les limites finies commutent aux colimites sur ensemble filtrant. La catégorie indexante  $J(C)^{\text{op}}$  est clairement filtrante car forme un treillis.  $\square$

## 2.6 Classifiant des sous-faisceaux

La section précédente a défini la faisceautisation, dont une des conséquences est la complétude et cocomplétude des topos de Grothendieck. Afin d'aller plus avant dans la démonstration que tout topos de Grothendieck est un topos élémentaire (au sens de Définition 1.5.7), cette section montre l'existence d'un classifiant des sous-objets dans toute catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ .

Considérons un scribe  $S$  sur un objet  $C$  d'un site  $(\mathcal{C}, J)$ . On dit que  $S$  est *clos* si pour tout  $f: D \rightarrow C$ ,

$$f^*(S) \in J(D) \implies f \in S. \quad (2.4)$$

*Remarque.* L'implication de Eq. (2.4) peut être remplacée par une équivalence : sans hypothèse sur le crible  $S$ ,  $f \in S$  implique  $f^*(S) = \mathbf{y}_D$  qui est toujours couvrant pour  $D$ .

Considérant le cas où le site  $(\mathcal{C}, J)$  est le treillis  $(\mathcal{O}(X), J_{\mathcal{O}})$  des ouvert d'un espace topologique  $X$  muni de la topologie ouverte, un crible est clos si et seulement s'il contient tous les ouverts qu'il recouvre. Ceci explique notamment le terme *clos*, référant à une opération de clôture du crible par recouvrement.

On pose alors pour tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,

$$\Omega(C) = \{S \text{ crible clos sur } C\}. \quad (2.5)$$

Remarquons alors que si  $S$  est un crible clos sur  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , pour tout  $h: D \rightarrow C$  et  $g: E \rightarrow D$ , si  $g^*h^*(S) = (hg)^*(S) \in J(D)$ , alors  $hg \in S$  par clôture de  $S$ , i.e.  $g \in h^*(S)$ ; ce qui montre que  $h^*(S)$  est clos. Autrement dit,

$$h^*: \Omega(C) \rightarrow \Omega(D) \quad (2.6)$$

est bien définie. Ainsi, Eq. (2.5) et Eq. (2.6) définissent un préfaisceau

$$\Omega: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}.$$



qu'on va montrer classifiant pour  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ .

La première étape est de montrer que  $\Omega$  est un faisceau. Pour cela, on commence par introduire la notion de clôture d'un crible qui nous permettra de former les amalgamations nécessaires. Pour tout crible  $S$  sur  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , on pose la *clôture* de  $S$  :

$$\bar{S} = \{h \in \mathbf{y}_C \mid h^*(S) \in J(\text{dom}(h))\}.$$

C'est évidemment un crible, clos de surcroît. Par définition même, un crible  $S$  clos satisfait  $\bar{S} = S$ .

**Proposition 2.6.1.** *Le préfaisceau  $\Omega$  est un faisceau.*

*Preuve.* Montrons déjà la séparation. Soient  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $S \in J(C)$ . Soient  $R, T \in \Omega(C)$ . Supposons que pour tout  $h: D \rightarrow C \in S$ , on ait

$$h^*(R) = h^*(T).$$

Comme  $R$  et  $T$  sont clos, cela montre que  $R \cap S = T \cap S$ . Prenant alors une flèche  $f: D \rightarrow E \in R$ , il suit de

$$f^*(T) \supseteq f^*(T \cap S) = f^*(R \cap S) = f^*(R) \cap f^*(S) \in J(D)$$

que  $f \in T$ . On a ainsi  $R \subseteq T$  et donc  $R = T$  par symétrie du problème.

Passons à l'existence des amalgamations pour toutes familles coïncidentes de cribles clos. Une telle famille pour un crible  $S$  couvrant  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  est la donnée  $(R_f)_{f \in S}$  de cribles clos  $R_f \in \Omega(\text{dom}(f))$  tels que pour tout  $f: D \rightarrow C \in S$  et  $g: E \rightarrow D$  quelconque

$$g^*(R_f) = R_{fg}.$$

Définissons alors

$$R = \{fg \in S \mid f \in S, g \in R_f\}.$$

C'est un crible car chacun des  $R_f$  en est un. C'est de plus une amalgamation de  $(R_f)$ . En effet, pour  $f: D \rightarrow C \in S$ , toute flèche  $g \in R_f$  satisfait  $fg \in R$ . Réciproquement, un élément  $g \in f^*(R)$  satisfait  $fg = f'g'$  pour certains  $f' \in S, g' \in R_{f'}$ , et notamment  $R_{fg} = R_{f'g'}$ . Il suit que  $g^*(R_f) = g'^*(R_{f'})$ , et par clôture de  $R_{f'} \ni g'$ , on a donc  $g^*(R_f) \in J(E)$  ( $E = \text{dom}(g') = \text{dom}(g)$ ). La clôture de  $R_f$  conclut enfin :  $g \in R_f$ . Il reste en revanche que  $R$  n'est pas nécessairement clos ; mais alors  $\bar{R}$  est une amalgamation close de  $(R_f)$  par la propriété (facile) suivante sur les cribles  $T$  quelconques sur  $C$  :

$$\forall k: D \rightarrow C, k^*(\bar{U}) = \overline{k^*(U)}.$$

□

Par définition de  $\text{Sh}((, \mathcal{C}), J)$  comme sous-catégorie pleine de  $\hat{\mathcal{C}}$ , les sous-faisceaux d'un faisceau  $F$  sous les sous-préfaisceaux de  $F$  satisfaisant la condition à être un faisceau. Il est ainsi naturelle de chercher une caractérisation des sous-faisceaux de  $F$  comme propriété sur les sous-préfaisceaux de  $F$ . Ce que fait le lemme (bien pratique) suivant.

**Lemme 2.6.2.** *Soit  $F$  un faisceau sur le site  $(\mathcal{C}, J)$ . Un sous-foncteur  $A \rightarrow F$  est un faisceau si et seulement si pour tout crible  $S$  couvrant un objet  $C$  et tout  $x \in F(C)$ , l'implication suivante est vérifiée :*

$$Ff(x) \in A(D) \text{ pour tout } f: D \rightarrow C \in S \implies x \in A(C).$$

*Preuve.*  $F$  étant un faisceau, toute famille coïncidante pour un crible  $S$  couvrant un objet  $C$  d'élément de  $F$  admet une unique amalgamation dans  $F(C)$ . Ainsi,  $A$  est un faisceau si et seulement pour tout crible  $S$  couvrant  $C$ , l'amalgamation dans  $F(C)$  d'une famille coïncidante pour  $S$  d'élément de  $A$  est en fait dans  $A(C) \subseteq F(C)$ . C'est exactement l'équivalence de l'énoncé.  $\square$

Afin de montrer que  $\Omega$  est classifiant dans  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ , il faut lui associer une flèche  $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$ . Remarquons d'abord que l'objet terminal existe bien dans  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  : c'est la limite (à isomorphisme près donc) du diagramme vide  $\emptyset$ . Comme  $i: \text{Sh}(\mathcal{C}, J) \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$  préserve les limites (en tant qu'adjoint à droite dans  $a \dashv i$ ), on sait même que cet objet terminal est celui de  $\widehat{\mathcal{C}}$ , i.e. le préfaisceau

$$\begin{aligned} 1: \mathcal{C}^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Sets} \\ C &\mapsto \{*\} \\ f &\mapsto 1_{\{*\}}, \end{aligned}$$

où  $\{*\}$  est un singleton (un objet terminal) de  $\mathbf{Sets}$ .

Pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , le crible  $\mathbf{y}_C$  est toujours couvrant et bien entendu toujours clos. On pose<sup>3</sup>

$$\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$$

la transformation naturelle  $(\text{true}_C)_{C \in \text{Ob } \mathcal{C}} = (* \mapsto \mathbf{y}_C)_{C \in \text{Ob } \mathcal{C}}$ .

**Proposition 2.6.3** (Classifiant des sous-objets d'un topos de Grothendieck.).  
*Le faisceau  $\Omega$ , muni de la flèche  $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$ , constitue un classifiant des sous-objets dans la catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ .*

*Preuve.* Soit  $F$  un faisceau et  $A \hookrightarrow F$  un sous-faisceau de  $F$ . On pose  $\chi: F \rightarrow \Omega$  le morphisme de faisceau défini pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  par

$$\chi_C: FC \rightarrow \Omega C, x \mapsto \{f \in \mathbf{y}_C \mid Ff(x) \in A(\text{dom}(f))\}.$$

Il est clair que  $\chi_C(x)$  est un crible pour tout  $x \in F(C)$ ,  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . Montrons encore qu'il est clos : soit  $f: D \rightarrow C$  telle que  $f^*(\chi_C(x)) \in J(D)$ ; alors

$$f^*(\chi_C(x)) = \{g: E \rightarrow D \mid F(fg)(x) = FgFf(x) \in A(E)\}$$

est un crible couvrant  $C$ , auxquels on peut appliquer Lemme 2.6.2; il suit  $Ff(x) \in A(D)$ , i.e.  $f \in \chi_C(x)$ . L'application  $\chi_C$  est ainsi bien définie pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . La naturalité de  $\chi$  est alors immédiate.

Reste à vérifier que  $A$  est bien le pullback du diagramme

$$F \xrightarrow{\chi} \Omega \xleftarrow{\text{true}} 1,$$

i.e. que pour tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , le carré

$$\begin{array}{ccc} AC & \longrightarrow & \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \text{true}_C \\ FC & \xrightarrow{\chi_C} & \Omega C \end{array}$$

est cartésien dans  $\mathbf{Sets}$ . C'est immédiat par Lemme 2.6.2.  $\square$

3. En fait, comme  $\mathbf{y}_C$  peut parfois être le seul crible couvrant d'un objet  $C$  dans la topologie  $J$  (penser à la topologie triviale pour un cas extrême), on n'a pas vraiment le choix pour la flèche  $\text{true}$ .

*Exemple(s) 2.6.4.* Soit  $J_{\text{tr}}$  la topologie de Grothendieck triviale sur la catégorie petite  $\mathcal{C}$ . On a alors vu que la catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J_{\text{tr}})$  est égale à  $\widehat{\mathcal{C}}$ . Décrivons  $\Omega$  dans ce cas particulier. La condition sur un crible  $S$  au-dessus de  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$  à être clos est vide : en effet, pour toute flèche  $f: D \rightarrow C$ ,  $f^*(D) \in J(D) = \{\mathbf{y}_D\}$  est équivalent à  $f \in S$ . Ainsi, tout crible est clos et donc,

$$\Omega \simeq \mathbf{y},$$

i.e. pour tout  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,  $\Omega(C)$  est l'ensemble de tous les cribles sur  $C$ .

Il est alors intéressant de voir qu'une topologie de Grothendieck  $J$  sur  $\mathcal{C}$  est notamment un sous-objet de  $\Omega$ . Par propriété classifiante de  $\Omega$ , il existe un unique morphisme  $j: \Omega \rightarrow \Omega$  tel que

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \end{array} \quad (2.7)$$

soit cartésien. L'axiomatisation d'une telle flèche  $j$  a été l'objet d'un travail par Lawvere et Tierney connu sous le nom de *topologie de Lawvere-Tierney*. Nous affirmons alors que pour tout  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ,

$$j_C: S \mapsto \{h \mid h^*S \in J(\text{dom}(h))\} \quad (2.8)$$

est l'opérateur de clôture décrit précédemment. En effet, la clôture d'un crible couvrant  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$  est évidemment  $\mathbf{y}_C$ , et donc le carré en Eq. (2.7) commute pour la flèche  $j$  décrite. Et réciproquement, par axiome de transitivité, les cribles de clôture maximale sont couvrants, i.e. pour toute flèche  $f: P \rightarrow \Omega$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & 1 \\ f \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega, \end{array}$$

les applications  $f_C: PC \rightarrow \Omega C$ ,  $C \in \text{Ob}\mathcal{C}$  sont à valeurs dans  $J(C) \subseteq \Omega(C)$ , factorisant ainsi  $f$  par corestriction à  $J$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & P & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & & \downarrow \text{dashed} & & \downarrow \text{true} \\ & & J & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ & & \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega. \end{array}$$

*(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. It shows a pullback square with  $J$  at the top-left,  $\Omega$  at the bottom-left,  $1$  at the top-right, and  $\Omega$  at the bottom-right. A map  $f: P \rightarrow \Omega$  is shown, along with a dashed arrow from  $P$  to  $J$  and a curved arrow from  $P$  to  $1$ .)*

Ceci assure que  $J \mapsto \Omega$  réalise le pullback de  $\text{true}$  le long de la flèche  $j$  décrite en Eq. (2.8), i.e. que  $j$  est bien la flèche caractéristique de  $J \mapsto \Omega$  introduite dans Eq. (2.7).

Cette description de  $j$  permet alors de retrouver le classifiant  $\Omega_J$  de  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  comme égaliseur (évident) de

$$\Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{1_\Omega} \\ \xrightarrow{j} \end{array} \Omega.$$

Ce fait nous servira dans l'élaboration de monomorphismes dans le topos de Cohen.

## 2.7 Exponentiations

Cette section finit de montrer que les topos de Grothendieck sont des topos élémentaires. On y construit en effet des exponentiations pour chaque pair d'objets.

Soit  $(\mathcal{C}, J)$  un site. Avant de montrer que le topos de Grothendieck  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  admet des exponentiations, on va montrer que la catégorie  $\widehat{\mathcal{C}}$  les admet. Pour  $P, Q$  préfaisceau sur  $\mathcal{C}$  et  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , on pose le préfaisceau

$$Q^P := \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(-) \times P, Q).$$

On va alors montrer que le foncteur

$$(-)^P : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

est l'adjoint à droite de  $- \times P$ . En effet, prenons  $P, Q, R$  des préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$ , pour tout morphisme de préfaisceau  $\varphi \in \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Q, R^P)$ , tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , et tout  $x \in Q(C)$ , on a une transformation naturelle

$$\varphi_C(x) : \mathbf{y}_C \times P \rightarrow R$$

par définition de  $R^P(C)$ . On définit alors le morphisme de préfaisceau  $\theta \in \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Q \times P, R)$  par

$$\theta_C : (x, y) \mapsto (\varphi_C(x))_C(1_C, y) \quad (C \in \text{Ob } \mathcal{C}).$$

L'association  $\varphi \mapsto \theta$  est facilement bijective et définit ainsi une bijection

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Q, R^P) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(Q \times P, R).$$

Cette dernière se montre sans difficulté naturelle en  $Q$  et  $R$ .

Passons maintenant aux exponentiations de  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ . Tout d'abord, montrons que, modulo leur existence, elles sont égales aux exponentiations dans  $\widehat{\mathcal{C}}$  des faisceaux vu comme préfaisceaux. Pour ce faire, supposons qu'un faisceau  $F$  admette une exponentiation dans  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ . L'adjonction  $- \times F \dashv (-)^F$  combinée à l'adjonction  $a \dashv i$  et l'exactitude à gauche de  $a$  permet d'établir pour tout préfaisceau  $G$  les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(-, i(G^F)) &\simeq \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathcal{C}, J)}(a(-), G^F) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathcal{C}, J)}(a(-) \times F, G) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathcal{C}, J)}(a(- \times iF), G) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(- \times iF, iG) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(-, iG^{iF}). \end{aligned}$$

Le lemme de Yoneda conclut :  $i(G^F) \simeq iG^{iF}$ . Ainsi, si exponentiation dans  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  il y a, il est nécessaire qu'elles soient formées dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

L'existence de ces exponentiations dans  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  vient du lemme suivant

**Lemme 2.7.1.** *Soit  $F$  un faisceau sur le site  $(\mathcal{C}, J)$ . Pour tout préfaisceau  $P$  sur  $\mathcal{C}$ , le préfaisceau  $F^P$  est un faisceau.*

*Preuve.* Remarquons que pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , on peut définir le foncteur

$$(-)^P(C) = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}((, \mathbf{y})C \times P, -) : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Sets}.$$

De la forme  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}((, A), -)$  (i.e. c'est un plongement covariant de Yoneda), il préserve les limites. Notamment les égaliseur, et ainsi, pour tout  $S$  couvrant  $C$ , le diagramme image

$$F^P(C) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_C \times P, \prod_{f \in S} F(\text{dom}(f))) \rightrightarrows \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_C \times P, \prod_{\substack{f \in S \\ g \in f^*S}} F(\text{dom}(g)))$$

est tout aussi égalisant que

$$F(C) \rightarrow \prod_{f \in S} F(\text{dom}(f)) \rightrightarrows \prod_{\substack{f \in S \\ g \in f^*S}} F(\text{dom}(g)).$$

Mais les produits sont également des limites. Aussi a-t-on

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}_C \times P, \prod_I F(A_i)) \simeq \prod_I F^P(A_i)$$

pour tout diagramme  $A: I \rightarrow \mathcal{C}$ . Ainsi, le diagramme

$$F^P(C) \rightarrow \prod_{f \in S} F^P(\text{dom}(f)) \rightrightarrows \prod_{f \in S, g \in f^*S} F^P(\text{dom}(g))$$

est encore égalisant. Valide pour tout  $S \in J(C)$ , et tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , ceci montre que  $F^P$  est un faisceau.  $\square$

Les résultats de Section 2.5, Section 2.6 et Section 2.7 combinés réunissent les conditions de Définition 1.5.7.

**Corollaire 2.7.2.** *Tout topos de Grothendieck est un topos élémentaire.*

## Chapitre 3

# Topos de Cohen

Ce chapitre construit effectivement le modèle de ZFC violant l'hypothèse du continu (HC), montrant ainsi  $\text{ZFC} \not\vdash \text{HC}$ . Pour ce faire, on utilise les conditions de *forcing* de Cohen. Ce sont en quelques sortes des approximations de plus en plus fine d'une impossible injection  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Le but informel est alors de construire un modèle dans lequel le plongement d'une telle flèche est bien un monomorphisme : le topos de Cohen.

Ce topos (de Grothendieck), à savoir  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  où  $\mathbf{P}$  est l'ensemble partiellement ordonné des conditions de forcing, construit une *fausse copie* des parties de  $\mathbb{N}$  strictement comprise entre son  $\mathbb{N}$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Plus explicitement, la catégorie de préfaisceaux  $\widehat{\mathbf{P}}$  contient un plongement de **Sets** via les préfaisceaux constants  $\Delta S$  ( $S$  ensemble). On y trouve notamment l'objet  $\Delta\mathbb{N}$  qui est l'ordinal  $\omega$  de  $\widehat{\mathbf{P}}$ . La fausse copie des parties de  $\mathbb{N}$  annoncée est alors  $\Delta\mathcal{P}(\mathbb{N})$  : on a

$$\Delta\mathbb{N} \hookrightarrow \Delta\mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathcal{P}(\Delta\mathbb{N})$$

sans qu'aucune des flèches ne soit un épimorphisme. On verra cependant que  $\widehat{\mathbf{P}}$  n'est a priori qu'un modèle intuitionniste de la théorie ZFC. Comme  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  est quant à lui un modèle classique, la dernière étape consiste à faisceautiser les objets obtenus et à s'assurer que les monomorphismes précédents sont bien conservés par cette opération. Il reste enfin à quotienter le topos booléen  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  par un ultrafiltre afin de le rendre bivalué et d'en faire un modèle au sens classique du terme. On n'explicitera pas cette dernière étape.

Avant d'entamer la construction proprement dite du topos de Cohen, on introduit les notions fondamentales permettant d'interpréter une logique dans un topos. Sans entrer dans les détails, si l'on est convaincu qu'un topos élémentaire est un modèle viable de  $ZF$ , alors on devrait pouvoir y développer une logique et une théorie des modèles *interne*. Habituellement, la satisfaction d'une formule par un modèle est définie récursivement à partir des formules atomiques. Une façon plus concise de le faire est de définir la satisfaction comme une morphisme d'algèbre de Boole de l'algèbre de Boole des formules (on fait ici abstraction des quantificateurs pour simplifier l'intuition) vers l'algèbre de Boole très particulière  $2 = \{0, 1\}$ . C'est le point de vue de la théorie des modèles booléen-valués introduite par Scott et Solovay. Afin de mimer cette pratique dans un topos élémentaire, il faudrait poser sur l'objet classifiant  $\Omega$  une structure d'algèbre de Boole. La structure définie sur le classifiant est en fait moins restrictive et permet l'interprétation d'une logique intuitionniste.

### 3.1 Algèbre de Heyting

L'algèbre de Heyting est à la logique intuitionniste ce que l'algèbre de Boole est la logique classique : la structure algébrique interprétant le calcul propositionnel.

**Définition 3.1.1** (Algèbre de Heyting). Une *algèbre de Heyting* est un ensemble partiellement ordonné ayant tout produit fini, tout coproduit fini et toute exponentiation.

Autrement dit, une algèbre de Heyting est un treillis avec éléments minimal et maximal et une opération annexe que l'on va détailler. Dans une algèbre de Heyting  $\mathcal{H}$ , étant donnés deux éléments  $x, y \in \mathcal{H}$ , on dénote le produit  $x \times y$  (parfois appelé *meet*) par  $x \wedge y$ , le coproduit  $x \amalg y$  (parfois appelé *join*) par  $x \vee y$  et l'exponentiation  $y^x$  par  $x \Rightarrow y$ . L'objet initial est noté  $0$ , l'objet terminal  $1$ . On rappelle que par définition,  $x \wedge - \dashv x \Rightarrow -$ ; en d'autres termes, pour  $x, y, z \in \mathcal{H}$ ,

$$z \leq x \Rightarrow y \quad \text{si et seulement si} \quad x \wedge z \leq y. \quad (3.1)$$

Il faut donc penser  $x \Rightarrow y$  comme la borne supérieure des éléments rencontrant  $x$  sous  $y$ .

*Exemple(s) 3.1.2.*

- (1) L'exemple classique d'algèbre de Heyting est le treillis  $\mathcal{O}(X)$  d'un espace topologique  $X$ . Le produit  $y$  est l'intersection, le coproduit l'union et l'exponentiation  $U \Rightarrow V$  est l'ouvert  $\bigcup_{(W \cap U) \subseteq V} W$ .
- (2) Toute algèbre de Boole  $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  forme une algèbre de Heyting en posant  $x \Rightarrow y = (\neg x \wedge y)$ .

L'adjonction  $x \wedge - \dashv x \Rightarrow -$  donne les propriétés de distributions du treillis auxquelles on s'attend. Plus explicitement, l'adjoint à gauche  $x \wedge -$  conserve les coproduits, tandis que l'adjoint à droite  $x \Rightarrow -$  conserve les produits :

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \Rightarrow (y \wedge z) &= (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z). \end{aligned}$$

Enfin, tout algèbre de Heyting  $\mathcal{H}$  définit un opérateur de négation par

$$\forall x \in \mathcal{H}, \neg x = (x \Rightarrow 0).$$

La différence avec une algèbre de Boole se fait alors sur la double négation :  $x \leq \neg\neg x$ , mais on a pas a priori l'égalité. Prenant l'exemple de l'algèbre de Heyting  $\mathcal{O}(X)$ , on a facilement  $\neg U = \text{Int}(X \setminus U)$ ; tout fermé non vide  $F$  d'intérieur vide satisfait alors  $\neg\neg(X \setminus F) = X$ .

Moralement, on peut faire dans une algèbre de Heyting toutes les opérations usuelles qu'on effectue dans les algèbres de Boole excepté la simplification de la double négation.

Si l'on introduit cette notion d'algèbre de Heyting, c'est qu'elle apparait naturellement dans les topos (de Grothendieck) comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 3.1.3.** *Soit  $(\mathcal{C}, J)$  un site. Pour tout faisceau  $F$ , l'ensemble partiellement ordonné  $\text{Sub}_{\text{Sh}(\mathcal{C}, J)}(F)$  est une algèbre de Heyting.*

*Preuve.* On rappelle que l'ensemble  $\text{Sub}(F)$  est ordonné par la relation de sous-foncteur : pour  $A, B \in \text{Sub}(F)$ ,  $A \leq B$  si et seulement si  $A(C) \subseteq B(C)$  pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .

L'objet initial  $0$  de  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  (existant comme colimite du diagramme  $\emptyset$ ) est sous-objets de tout faisceau. Il est donc minimal dans  $\text{Sub}(F)$ . L'objet  $F$  est clairement maximal dans  $\text{Sub}(F)$ . Ceci règle la question des *top* et *bottom* de  $\text{Sub}(F)$ .

Le produit  $A \wedge B$  est donné point par point comme

$$(A \wedge B)(C) = A(C) \cap B(C), \quad \forall C \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

Il est évident que  $A \wedge B$  est un sous-préfaisceau de  $F$ , meet de  $A$  et  $B$  dans  $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(F)$ . Il reste donc à vérifier que c'est un faisceau : toute famille coïncidante pour un crible couvrant de  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  d'éléments de  $A \wedge B$  admet, en tant que famille coïncidante d'éléments de  $A$ , une unique amalgamation dans  $A(C)$ , et en tant que famille coïncidante d'éléments de  $B$ , une unique amalgamation dans  $B(C)$ ; or en tant que famille coïncidante d'éléments de  $F$ , l'amalgamation est unique dans  $F(C)$  et se trouve donc dans  $A(C) \cap B(C)$ .

On va maintenant expliciter le coproduit  $A \vee B$ . Rappelons que pour tout  $P \in \text{Sub}_{\mathcal{C}}(F)$ ,  $P$  faisceau équivaut à

$$Ff(x) \in P(D) \text{ pour tout } f: D \rightarrow C \in S \text{ implique } x \in P(C) \quad (3.2)$$

pour tout crible  $S$  couvrant un objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et tout  $x \in F(C)$ . Posons alors pour tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $x \in F(C)$ , le crible sur  $C$

$$S_x = \{f: D \rightarrow C \mid Ff(x) \in A(D) \cup B(D)\}.$$

Considérons le sous-préfaisceau  $Q$  de  $F$  défini pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  par

$$Q(C) = \{x \in F(C) \mid S_x \in J(C)\}.$$

La caractérisation rappelée en Eq. (3.2), associée à la propriété de transitivité d'une topologie de Grothendieck (voir Définition 2.3.1 (iii)), montre que  $Q$  est un sous-faisceau de  $F$ . Il majore  $A$  et  $B$  puisque pour tout  $x \in A(C) \cup B(C)$ ,  $S_x = \mathbf{y}_C$ . De plus, si  $P \in \text{Sub}(F)$  avec  $A, B \leq P$ , alors pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et tout  $x \in Q(C)$ , on applique Eq. (3.2) au faisceau  $P$  et au crible  $S_x$  couvrant  $C$  : pour tout  $f: D \rightarrow C \in S_x$ ,  $Ff(x) \in A(D) \cup B(D) \subseteq P(D)$ , donc  $x \in P(C)$ . Ceci montre que  $Q$  est le coproduit  $A \vee B$  de  $A$  et  $B$  dans l'ensemble partiellement ordonné  $\text{Sub}(F)$ .

Il reste à montrer que  $\text{Sub}(F)$  admet toutes les exponentiations. Soit  $A, B \in \text{Sub}(F)$ . D'après Eq. (3.1), il s'agit de montrer que l'ensemble  $\{P \in \text{Sub}(F) \mid A \wedge P \leq B\}$  admet une borne supérieure. Définissons le sous-préfaisceau  $Q$  de  $F$  pour tout  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  par

$$Q(C) = \{x \in F(C) \mid \forall f: D \rightarrow C, Ff(x) \in A(D) \implies Ff(x) \in B(D)\},$$

qu'on va montrer être la borne supérieure cherchée. C'est avant tout un élément de  $\text{Sub}(F)$  par la caractérisation rappelée en Eq. (3.2) couplée à l'axiome de stabilité des topologies de Grothendieck (voir Définition 2.3.1 (ii)). C'est également un majorant des  $P \in \text{Sub}(F)$  tel que  $A \wedge P \leq B$  : pour tout  $x \in P(C)$ , et tout  $f: D \rightarrow C$ , si  $Ff(x) \in A(D)$  alors  $Ff(x) \in A(D) \cap P(D) \subseteq B(D)$ .



De plus  $A \wedge Q \leq B$  : tout  $x \in A(C) \cup Q(C)$  vérifie que pour tout  $f: D \rightarrow C$ ,  $Ff(x) \in A(D)$  et  $Ff(x) \in Q(D) \implies Ff(x) \in B(D)$ , donc  $Ff(x) \in B(D)$ ;  $\mathbf{y}_C$  couvrant  $C$ , la caractérisation Eq. (3.2) conclut  $x \in B(C)$ . Ainsi  $Q$  réalise un maximum de l'ensemble des  $P$  rencontrant  $A$  sous  $B$  : c'est l'exponentiation  $A \Rightarrow B$ .  $\square$

*Remarque.* La preuve d'existence des produits  $\wedge$  et coproduits  $\vee$  s'étendent directement à des produits  $\bigwedge_I$  et coproduits  $\bigvee_I$  sur un ensemble  $I$  quelconque. L'algèbre de Heyting décrite est donc en fait complète (i.e. son treillis sous-jacent est complet).

Afin d'alléger les notations, notons  $\mathcal{E}$  le topos de Grothendieck  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ . La structure d'algèbre de Heyting sur les  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$  va permettre de munir le classifiant  $\Omega$  d'une structure d'*algèbre de Heyting interne*. Rappelons en effet que  $\mathcal{E}$  étant well-powered, complète, et ayant un classifiant des sous-objets  $\Omega$ , il existe d'après Proposition 1.5.5 une transformation naturelle

$$\theta: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{E}}(-, \Omega). \quad (3.3)$$

Rappelons également que pour tout morphisme  $\varphi: F \rightarrow G$ , l'application

$$\text{Sub}_{\mathcal{E}}(\varphi): \text{Sub}_{\mathcal{E}}(G) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$$

est défini par pullback : pour tout  $B \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(G)$ , le carré suivant est cartésien,

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}_{\mathcal{E}}(\varphi)(B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\varphi} & G. \end{array}$$

$\text{Sub}_{\mathcal{E}}(\varphi)$  est alors clairement croissante. On peut en fait montrer facilement que  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(\varphi)$  est un morphisme d'algèbre de Heyting : pour plus de concision, nous n'explicitons pas le détail ici. Cette observation montre l'existence de transformations naturelles

$$\begin{aligned} \wedge: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) \times \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) &\rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-), \\ \vee: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) \times \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) &\rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-), \\ \Rightarrow: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) \times \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) &\rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-), \\ \neg: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-) &\rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(-), \end{aligned}$$

tels que pour tout faisceau  $F$ , les morphismes  $\wedge_F, \vee_F, \Rightarrow_F, \neg_F$  soient les opérations décrites de l'algèbre de Heyting  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$ . Appliquant alors le lemme de Yoneda (cf. Lemme 1.4.2), la transformation naturelle  $\theta$  de Eq. (3.3) induit des morphismes

$$\begin{aligned} \wedge: \Omega \times \Omega &\rightarrow \Omega, \\ \vee: \Omega \times \Omega &\rightarrow \Omega, \\ \Rightarrow: \Omega \times \Omega &\rightarrow \Omega, \\ \neg: \Omega &\rightarrow \Omega. \end{aligned}$$

*Remarque.* À proprement parler,  $\Omega$  n'est pas une algèbre de Heyting car n'est pas un ensemble. En revanche, les endomorphismes décrits ci-dessus respectent tous les diagrammes commutatifs habituellement mis en jeu lors de la description d'une algèbre de Heyting classique. On dit que l'objet  $\Omega$  a une structure d'*algèbre de Heyting interne*.

Rappelons que l'isomorphisme  $\theta$  de Eq. (3.3) est défini pour tout objet  $F$  par

$$\theta_F: \text{Sub}(F) \rightarrow \text{Hom}(F, \Omega), A \mapsto \chi_A$$

où  $\chi_A: F \rightarrow \Omega$  est le morphisme caractéristique de  $A$  en tant que sous-objet de  $F$ . Ainsi, par définition même, pour tout  $A, B \in \text{Sub}(F)$ , les flèches

$$\begin{aligned} F &\xrightarrow{(\chi_A, \chi_B)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega, \\ F &\xrightarrow{(\chi_A, \chi_B)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\vee} \Omega, \\ F &\xrightarrow{(\chi_A, \chi_B)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega, \\ F &\xrightarrow{\chi_A} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega \end{aligned}$$

sont les flèches caractéristiques respectives de  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \Rightarrow B$  et  $\neg A$  en tant que sous-objets de  $F$ .

*Exemple(s) 3.1.4 (Important !).* Cet exemple nous servira dans la suite de la construction du topos de Cohen. On munit un ensemble partiellement ordonné  $P$  de la topologie dense  $J_{\neg}$  (cf. Exemple(s) 2.3.3 (3)). Notons  $\mathcal{E}$  le topos  $\text{Sh}(P, J_{\neg})$ .

On commence par montrer que  $\mathcal{E}$  est *booléen*, i.e. que pour tout faisceau  $F$  sur  $(P, J_{\neg})$ , l'algèbre de Heyting  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$  est une algèbre de Boole. Clairement, cela revient à montrer que dans l'algèbre de Heyting  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$ , on a pour tout  $A \mapsto F$ ,

$$\neg\neg A = A.$$

Appuyons-nous sur la description explicite des opérateurs faite dans la preuve de Proposition 3.1.3. Pour tout  $A \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$  et  $p \in P$ , on a

$$\begin{aligned} \neg A(p) &= (A \Rightarrow 0)(p) \\ &= \{x \in Fp \mid \forall f, Ff(x) \in A(\text{dom}(f)) \implies Ff(x) \in 0(\text{dom}(f))\}. \end{aligned}$$

L'objet dénoté  $0$  est l'élément minimal de l'algèbre de Heyting  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$ , et est par conséquent l'objet initial du topos  $\text{Sh}(P, J_{\neg})$ . Pour un site quelconque  $(\mathcal{C}, K)$ , l'objet initial de  $\text{Sh}(\mathcal{C}, K)$  n'est égal à l'objet initial des préfaisceaux ( $C \mapsto \emptyset$ ) que si ce dernier est un faisceau, c'est-à-dire si et seulement si  $\emptyset \notin J(\mathcal{C}), \forall C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ <sup>1</sup>. Or, pour tout  $p \in P$ , les éléments de  $J_{\neg}(p)$  sont les cribles denses sous  $p$ , notamment non vide : l'objet initial de  $\text{Sh}(P, J_{\neg})$  est donc le préfaisceau constant égal à  $\emptyset$ . Ce qui donne la description plus explicite : pour tout  $p \in P$ ,

$$\neg A(p) = \{x \in Fp \mid \forall f, Ff(x) \notin A(\text{dom}(f))\}.$$

Appliquant à  $\neg A \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$ , pour tout  $p \in P$ ,

$$\neg\neg A(p) = \{x \in Fp \mid \forall f, \exists g, F(fg)(x) \in A(\text{dom}(g))\}.$$

---

1. Car  $\emptyset$  n'est jamais l'égalisateur de  $1 \rightrightarrows 1$ .

On retrouve  $A(p) \subseteq \neg\neg A(p)$  qu'on avait déjà car l'inégalité  $A \leq \neg\neg A$  tient dans toute algèbre de Heyting. Il s'agit alors de constater l'inclusion réciproque : prenant  $x \in \neg\neg A(p)$ , notons

$$S = \{h \mid Fh(x) \in A(\text{dom}(h))\};$$

alors  $S$  est clairement un crible sur  $p \in P$  et par définition de  $\neg\neg A(p)$ , pour tout  $f: q \rightarrow p$ , il existe  $g: r \rightarrow q$  tel que  $fg \in S$ , faisant de  $S$  un crible dense, donc couvrant  $p$ . Lemme 2.6.2 conclut alors.

On finit l'étude de cette exemple par l'égalité de deux morphismes de préfaisceaux sur  $P$  qui serviront plus après. Notons  $\Omega$  le classifiant du topos  $\widehat{P}$  et  $\Omega_{\neg\neg}$  celui du topos  $\text{Sh}(P, J_{\neg\neg})$ . On montre l'égalité entre la flèche  $\neg\neg = \neg \circ \neg: \Omega \rightarrow \Omega$  introduite dans cette section et la flèche  $j_{\neg\neg}: \Omega \rightarrow \Omega$  caractéristique du sous-objet  $J_{\neg\neg} \rightarrow \Omega$  introduite en Exemple(s) 2.6.4. On prendra bien garde de ne pas confondre les  $\neg$  de ce paragraphe (référant aux algèbres de Heyting  $\text{Sub}_{\widehat{P}}(-)$ ) avec les  $\neg$  du paragraphe précédent (référant aux  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(-)$ ). D'un côté, par définition, pour tout sous-préfaisceau  $A \rightarrow F$  d'un préfaisceau  $F$  sur  $P$ , comme l'élément initial de  $\text{Sub}_{\widehat{P}}(F)$  est le préfaisceau constant vide, on a pour tout  $p \in P$ ,

$$\neg\neg A(p) = \{x \in Fp \mid \forall f, \exists g, F(fg)(x) \in A(\text{dom}(g))\}.$$

De plus, la flèche  $\neg\neg: \Omega \rightarrow \Omega$  est telle que

$$F \xrightarrow{\chi_A} \Omega \xrightarrow{\neg\neg} \Omega$$

soit la flèche caractéristique de  $\neg\neg A \rightarrow F$  quand celle de  $A \rightarrow F$  est  $\chi_A$ , définie pour tout  $p \in P$  par

$$(\chi_A)_p: x \mapsto \{f \mid Ff(x) \in A(\text{dom}(f))\}.$$

De l'autre côté, par l'explicitation de Exemple(s) 2.6.4, pour tout  $p \in P$ , l'application

$$(j_{\neg\neg})_p: \Omega(p) \rightarrow \Omega(p)$$

est l'opération de clôture des cribles sur  $p$ , i.e. pour tout crible  $S$  sur  $p$ ,

$$(j_{\neg\neg})_p(S) = \{f \mid f^*(S) \text{ dense sous } \text{dom}(f)\}.$$

Ainsi, pour  $x \in F(p)$ ,  $(j_{\neg\neg})_p((\chi_A)_p(x)) = \mathbf{y}_p$  si et seulement si pour tout  $f: p \rightarrow q$ , il existe une flèche  $g: r \rightarrow q$  telle que  $F(fg)(x) \in A(\text{dom}(g))$ , i.e. si et seulement si  $x \in \neg\neg A(p)$ . Autrement dit, le carré

$$\begin{array}{ccc} \neg\neg A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ F & \xrightarrow{\chi_A} \Omega & \xrightarrow{j_{\neg\neg}} \Omega \end{array}$$

est cartésien dans  $\widehat{P}$ . Ceci étant valide pour tout préfaisceau  $F$  et sous-objets  $A \rightarrow F$ , c'est une caractérisation de  $\neg\neg: \Omega \rightarrow \Omega$ , i.e.

$$j_{\neg\neg} = \neg\neg.$$

*Remarque.* L'étude ci-dessus ne fait pas référence au fait que  $P$  est un poset. Ainsi, tout site  $(\mathcal{C}, J)$  où  $J$  est la topologie dense fait de  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  un topos booléen pour lequel  $j = \neg\neg$ .

## 3.2 Objet des entiers naturels

À la fin de Chapitre 1, on a introduit les topos élémentaires comme de potentiels modèles de ZF. En fait, on se convainc facilement de l'existence dans tout topos  $\mathcal{E}$  d'un modèle transitif de  $ZF_0$  (l'axiomatique  $ZF$  privé de l'axiome de l'infini : partant de l'objet initial  $\omega_0 := 0$ , on produit  $\omega_1 := \Omega^0$ , puis  $\omega_2 := \Omega^{\omega_1}$ , etc. reproduisant les ordinaux de Von Neumann dans  $\mathcal{E}$ . En revanche, il n'est pas clair (et on verra qu'il est faux) que tout topos  $\mathcal{E}$  satisfait l'axiome de l'infini.

Afin de considérer la satisfaction d'un tel axiome dans un topos  $\mathcal{E}$ , il faut déjà l'exprimer diagrammatiquement. Pour cela, on cherche à axiomatiser les propriétés de l'objet  $\mathbf{N}$  dans **Sets**.

**Définition 3.2.1.** Soit  $\mathcal{E}$  un topos élémentaire. Un objet  $\mathbf{N}$  de  $\mathcal{E}$  est dit *objet des entiers naturels* s'il existe deux flèches  $z: 1 \rightarrow \mathbf{N}$  et  $s: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telles que pour tout objet  $X \in \text{Ob } \mathcal{E}$  et toutes flèches  $x: 1 \rightarrow X$ ,  $f: X \rightarrow X$ , il existe une unique flèche  $h: \mathbf{N} \rightarrow X$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{z} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N} \\ 1_1 \downarrow & & h \downarrow & & h \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

*Remarque.* La flèche  $z: 1 \rightarrow \mathbf{N}$  est l'objet initial de la catégorie des diagrammes

$$\mathcal{J} \rightarrow 1 \setminus \mathcal{E}$$

où  $\mathcal{J} \simeq \mathbb{Z}_2$  est la catégorie à un unique objet et un unique morphisme non trivial. Notamment, il est unique à unique isomorphisme près.

L'objet  $\mathbf{N}$  de **Sets** est alors bien un objet des entiers naturels du topos **Sets** : la flèche  $z$  est définie par  $* \mapsto 0$  et la flèche  $s$  est la fonction successeur ; et pour tout autre ensemble  $X$  particularisant  $x \in X$  et muni d'une application  $f: X \rightarrow X$ , on a l'unique fonction  $n \mapsto f^n(x)$  faisant commuter le diagramme de la définition.

**Proposition 3.2.2.** *Tout topos de Grothendieck admet un objet des entiers naturels.*

*Preuve.* Soit  $(\mathcal{C}, J)$  un site. Pour tout ensemble  $S$ , on note  $\Delta S$  le préfaisceau constant

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}, C \mapsto S, f \mapsto 1_S.$$

Montrons alors que  $a\Delta\mathbf{N}$  est un objet des entiers naturels. Le diagramme

$$1 \xrightarrow{0} \mathbf{N} \xrightarrow{s} \mathbf{N}$$

de **Sets** se transporte en un diagramme

$$1 \xrightarrow{\Delta 0} \Delta\mathbf{N} \xrightarrow{\Delta s} \Delta\mathbf{N}$$

de  $\widehat{\mathcal{C}}$ . De plus, si un préfaisceau  $F$  admet deux flèches

$$1 \xrightarrow{x} F \xrightarrow{f} F,$$

alors pour tout objet  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , notons  $h_C: \mathbb{N} \rightarrow F(C)$  l'application  $n \mapsto \varphi_C^n(x_C(*))$ . La collection  $(h_c)$  est facilement naturelle en  $C$ , définissant  $h: \Delta\mathbb{N} \rightarrow F$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\Delta 0} & \Delta\mathbb{N} & \xrightarrow{\Delta s} & \Delta\mathbb{N} \\ 1_1 \downarrow & & h \downarrow & & h \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{x} & F & \xrightarrow{\varphi} & F. \end{array}$$

Le morphisme  $h$  est alors unique par unicité de tous les  $h_C$ . Ceci montre que  $\Delta\mathbb{N}$ , muni de  $\Delta 0$  et  $\Delta s$ , forme un objet des entiers naturels de  $\widehat{\mathcal{C}}$ . La remarque faite après Définition 3.2.1 et l'exactitude à droite du foncteur  $a$  (Proposition 2.5.6) montre que  $a\Delta\mathbb{N}$ , muni des flèches  $a\Delta 0$  et  $a\Delta s$ , forme un objet des entiers naturels de la catégorie  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ .  $\square$

Comme annoncé en début de section, il serait faux de croire que tous les topos élémentaires admettent un objet des entiers naturels. À titre de contre-exemple, considérons la catégorie **FinSets** des ensembles finis et application entre eux (i.e. la sous-catégorie pleine de **Sets** d'objets les ensemble finis). Il est clair que **FinSets** est un topos élémentaire. Mais ce topos n'a pas d'objet des entiers naturels. En effet, soit  $\mathbf{N}$  un tel objet :

$$1 \xrightarrow{z} \mathbf{N} \xrightarrow{s} \mathbf{N}.$$

Par propriété d'objet des entiers naturels de  $\mathbb{N}$  dans **Sets**, il existe  $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telle que pour tout ensemble fini  $X$ , tout  $x \in X$  et toute fonction  $f: X \rightarrow X$ , il existe une unique  $h: \mathbf{N} \rightarrow X$  avec  $hk(n) = f^n(x)$  et faisant commuter

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & \mathbb{N} & \xrightarrow{\cdot + 1} & \mathbb{N} \\ 1_1 \downarrow & & k \downarrow & & k \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{z} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N} \\ 1_1 \downarrow & & h \downarrow & & h \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Notamment, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , prenant  $X = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $x = 0$  et  $f$  le  $(n+1)$ -cycle  $(0, 1, \dots, n)$ , cela montre que  $k|_{\{0, \dots, n\}}$  est injective. Ainsi, on a montré  $\mathbf{N}$  infini, ce qui contredit  $\mathbf{N} \in \text{Ob } \mathbf{FinSets}$ .

### 3.3 Topos de Cohen

On rappelle qu'on a fixé un modèle  $\mathcal{U}$  de ZFC au début du document sont la catégorie des éléments est **Sets**. Ce modèle a notamment un ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers, et les ensembles puissance  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ . Rappelons encore que dans **Sets**, l'objet  $2 = \{0, 1\}$  munie de l'application true:  $\{*\} \rightarrow 2$ ,  $* \mapsto 0$  est un classifiant des sous-objets. On pose alors

$$\mathbf{P} = \{(C, p) \mid C \subseteq B \times \mathbb{N} \text{ fini}, p: C \rightarrow 2\},$$

qu'on munit de l'ordre partiel  $\leq$  donné par

$$(C, p) \leq (C', p') \quad \text{si et seulement si} \quad C' \subseteq C \text{ et } p|_{C'} = p'.$$

L'intuition derrière cette définition est la suivante : les éléments de  $\mathbf{P}$  (communément appelés *conditions de forcing*) sont des approximations à supports finis d'une impossible injection  $B \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , i.e. une impossible flèche  $f: B \times \mathbb{N} \rightarrow 2$  satisfaisant  $b \neq b' \implies \exists n \in \mathbb{N}, f(b, n) \neq f(b', n)$  pour tout  $b, b' \in B$ ; plus  $(C, p)$  est petit dans l'ordre  $\leq$ , plus cette approximation est fine.

Comme tout ensemble partiellement ordonné, on peut voir  $(\mathbf{P}, \leq)$  comme une catégorie petite qu'on munit de la topologie dense  $J_{\neg}$ . Le *topos de Cohen* est alors  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg})$ . Le reste du document est consacré à montrer (partiellement) le résultat suivant.

**Théorème 3.3.1** (ZFC  $\not\vdash$  HC). *Le topos de Cohen  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg})$  est un topos booléen de classifiant des sous-objets  $\Omega$ , satisfaisant l'axiome du choix, et admettant un objet des entiers naturels  $\mathbf{N}$ , un objet  $K$  et des monomorphismes*

$$\mathbf{N} \hookrightarrow K \hookrightarrow \Omega^{\mathbf{N}}$$

*tels qu'aucun des monomorphismes ci-dessus ne soit un épimorphisme.*

Autrement dit,  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg})$  est un modèle de  $\text{ZFC} + \neg\text{HC}$ . Ce modèle est quelque peu bizarre car sa logique interne est booléen-valuée. Cela n'est pas un problème : il existe un façon de *quotienter* les topos booléen dont le résultat est un topos 2-valuée, i.e. dont l'algèbre de Heyting interne  $\Omega$  est isomorphe à l'algèbre de Boole triviale 2. Étant donné le cadre de rédaction de ce document, ces notions resteront intuitives. On s'en tiendra à montrer Théorème 3.3.1. On a bien entendu déjà montré que  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg})$  est un topos (de Grothendieck), booléen (Exemple(s) 3.1.4), ayant un objet des entiers naturels (Proposition 3.2.2).

On commence par l'assertion «  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg})$  satisfait l'axiome du choix ». On dit qu'un topos  $\mathcal{E}$  satisfait l'axiome du choix si tout épimorphisme  $p: X \rightarrow I$  admet un section, i.e. une flèche  $s: I \rightarrow X$  telle que  $ps = 1_I$ . Afin de montrer que le topos de Cohen a cette propriété, on introduit la notion de *famille d'objets génératrice* : une famille  $\mathcal{G}$  d'objets d'une catégorie  $\mathcal{E}$  est dite *génératrice* si pour tout paire de flèches  $f, g: A \rightrightarrows B$ ,  $f \neq g$  implique l'existence d'une flèche  $u: G \rightarrow A$  de domaine  $G \in \mathcal{G}$  telle que  $fu \neq gu$ . Par exemple, la catégorie **Sets** admet l'unique objet 1 comme famille génératrice : deux flèches  $f, g: A \rightrightarrows B$  différent dans **Sets** si et seulement si il existe  $x \in A$  tel que  $f(x) \neq g(x)$ , i.e. si et seulement si il existe une flèche  $\underline{x}: 1 \rightarrow A, * \mapsto x$  telle que  $f\underline{x} \neq g\underline{x}$ . En fait, comme on va le voir, c'est plus exactement la famille  $\text{Ob Sub}_{\mathbf{Sets}}(1)$  (constituée de  $\emptyset$  et 1) qui est génératrice.

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $\mathcal{E}$  un topos admettant les sous-objets de 1 comme famille génératrice et dont tous les algèbres de Heyting  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X), X \in \text{Ob } \mathcal{E}$  sont des algèbres de Boole complète. Alors  $\mathcal{E}$  satisfait l'axiome du choix.*

*Preuve.* Admis. □

**Proposition 3.3.3.** *Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné. Munissant  $P$  de la topologie dense  $J_{\neg}$ , le topos de Grothendieck  $\text{Sh}(P, J_{\neg})$  satisfait l'axiome du choix.*

*Preuve.* La remarque faite à la suite de Proposition 3.1.3 assure que dans un topos de Grothendieck  $\mathcal{E}$ , les  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X), X \in \text{Ob } \mathcal{E}$  sont des treillis complets. On sait également déjà (cf. Exemple(s) 3.1.4) que chaque  $\text{Sub}(X), X \in$

$\text{Ob Sh}(P, J_{\neg\neg})$  est une algèbre de Boole. Il suffit alors de montrer que  $\text{Sub}(1)$  est une famille génératrice pour conclure par Proposition 3.3.3.

Le lemme de Yoneda appliquée dans  $\text{Sh}(P, J_{\neg\neg})$  combinée à l'adjonction  $a \dashv i$  décrite en Section 2.5 assure que pour tout faisceau  $F$  sur  $(P, J_{\neg\neg})$ , on a :

$$F \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{P}}}(y, iF) \simeq \text{Hom}_{\text{Sh}(P, J_{\neg\neg})}(ay, F).$$

Ceci montre notamment que la famille  $(ay_X)_{X \in P}$  est génératrice dans  $\text{Sh}(P, J_{\neg\neg})$ . Comme de plus ici, pour tout  $X \in P$ , on a  $y_X \in \text{Sub}_{\widehat{\mathcal{P}}}(1)$ , l'exactitude à gauche de  $a$  (Lemme 2.5.8) conclut :  $ay_X \in \text{Sub}_{\text{Sh}(P, J_{\neg\neg})}(1)$ .  $\square$

Il s'agit maintenant de montrer la partie difficile de Théorème 3.3.1 : l'existence d'un objet  $K$  *strictement entre* l'objet des entiers naturels et celui de ses parties. Informellement, nous allons suivre le schéma suivant. On cherche à *construire* une application  $B \times \mathbb{N} \rightarrow 2$  satisfaisant  $b \neq b' \implies \exists n \in \mathbb{N}, f(b, n) \neq f(b', n)$  pour tout  $b, b' \in B$ , qu'on sait ne pas pouvoir exister dans notre modèle  $\mathcal{U}$  de ZFC. On *se donne de la place* en plongeant tout le problème dans  $\widehat{\mathbf{P}}$  : on y trouve un objet strictement inclus entre son objet des entiers naturels et celui de ses parties. Enfin, on faisceautise le tout en gardant cette inclusion, afin de se trouver dans le topos booléen  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg\neg})$ . Rappelons que pour tout ensemble  $S \in \text{Ob Sets}$ , on note

$$\Delta S: \mathbf{P}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

le préfaisceau constant associant  $S$  à tout objet de  $\mathbf{P}$ , et  $1_S$  à tout morphisme de  $\mathbf{P}$ . C'est cet opérateur  $\Delta$  qui nous permet de plonger le problème dans  $\widehat{\mathbf{P}}$ . Posons pour cela un préfaisceau  $A$  défini pour tout  $(C, p) \in \mathbf{P}$  par

$$A(C, p) = \{(b, n) \in C \mid p(b, n) = 0\}.$$

L'image des flèches  $(C, p) \leq (C', p')$  de  $\mathbf{P}$  est donnée par l'inclusion  $A(C', p') \subseteq A(C, p)$  qu'induit la définition de  $\leq$  dans  $\mathbf{P}$ . Il est alors clair que  $A$  est un sous-foncteur de  $\Delta(B \times \mathbb{N}) = \Delta B \times \Delta \mathbb{N}$ . Notons  $\Omega$  le classifiant des sous-objets de  $\widehat{\mathbf{P}}$  et  $\Omega_{\neg\neg}$  celui de  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg\neg})$ . Il existe alors une flèche caractéristique  $\chi_A: \Delta B \times \Delta \mathbb{N} \rightarrow \Omega$  réalisant un pullback

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta B \times \Delta \mathbb{N} & \xrightarrow{\chi_A} & \Omega. \end{array}$$

On va alors montrer que cette flèche caractéristique se factorise par une flèche  $\Delta B \times \Delta \mathbb{N} \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$ .

**Lemme 3.3.4.** *Le sous-objet  $A \in \text{Sub}(\Delta B \times \Delta \mathbb{N})$  satisfait*

$$\neg\neg A = A.$$

*Preuve.* Rappelons que l'élément minimal du treillis  $\text{Sub}(\Delta B \times \Delta \mathbb{N})$  est le pré-faisceau vide  $0 = \Delta \emptyset$ . Alors, suivant la description de Section 3.1, pour tout  $(C, p) \in \mathbf{P}$ ,  $\neg A(C, p) = (A \Rightarrow 0)(C, p)$  s'écrit

$$\neg A(C, p) = \{(b, n) \in B \times \mathbb{N} \mid \forall (C', p') \leq (C, p), (b, n) \notin A(C', p')\}.$$

---

2. A priori non caractéristique :  $\Delta B \times \Delta \mathbb{N}$  n'a aucune raison d'être un faisceau sur  $(\mathbf{P}, J_{\neg\neg})$ .

Aussi peut-on décrire

$$\begin{aligned}\neg\neg A(C, p) &= \{(b, n) \in B \times \mathbb{N} \mid \forall(C', p') \leq (C, p), (b, n) \notin \neg A(C', p')\} \\ &= \{(b, n) \in B \times \mathbb{N} \mid \forall(C', p') \leq (C, p), \\ &\quad \exists(D, q) \leq (C', p'), (b, n) \in A(D, q)\}.\end{aligned}$$

Montrons alors  $\neg\neg A(C, p) = A(C, p)$  pour conclure. L'inclusion  $\supseteq$  est triviale. Concentrons nous sur  $\subseteq$  : si  $(b, n) \in \neg\neg A(C, p)$ , pour tout  $(C', p') \leq (C, p)$ , il existe  $(D, q) \leq (C', p')$  tel que  $(b, n) \in A(D, q)$ , i.e.  $(b, n) \in D$  et  $q(b, n) = 0$ . Si  $(b, n) \in C$ , alors  $p(b, n) = q(b, n) = 0$  et donc  $(b, n) \in A(C, p)$ . Il suffit ainsi de montrer  $(b, n) \in C$ . Par l'absurde, supposons  $(b, n) \notin C$ ; on peut alors construire la condition de forcing  $(C', p') \leq (C, p)$  définie par  $C' = C \cup \{(b, n)\}$ ,  $p' \upharpoonright_C = p$  et  $p'(b, n) = 1$ ; aucune condition de forcing  $(D, q)$  avec  $q(b, n) = 0$  ne peut alors satisfaire  $(D, q) \leq (C', p')$ .  $\square$

Rappelons que  $J_{\neg\neg} \rightarrow \Omega$  induit une flèche  $j_{\neg\neg} : \Omega \rightarrow \Omega$  qu'on a montré égale à  $\neg\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  en Exemple(s) 3.1.4. Or  $A = \neg\neg A$ , donc notamment leurs flèches caractéristiques en tant que sous-objets de  $\text{Sub}(\Delta B \times \Delta \mathbb{N})$  sont égales, i.e.

$$\Delta B \times \Delta \mathbb{N} \xrightarrow{\chi_A} \Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{1_\Omega} \\ \xrightarrow{\neg\neg} \end{array} \Omega$$

commute. Comme on a montré (cf. Exemple(s) 2.6.4) que le diagramme

$$\Omega_{\neg\neg} \longrightarrow \Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{1_\Omega} \\ \xrightarrow{j_{\neg\neg}} \end{array} \Omega$$

est égalisant (la première flèche étant simplement l'inclusion point par point), on a la factorisation annoncée par (unique) flèche  $f : \Delta B \times \Delta \mathbb{N} \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$  :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\neg\neg} & \longrightarrow & \Omega \\ f \uparrow & \nearrow \chi_A & \\ \Delta B \times \Delta \mathbb{N} & & \end{array}$$

La catégorie  $\widehat{P}$  étant un topos (de Grothendieck), elle a toutes les exponentiations. Notamment  $(-)^{\Delta \mathbb{N}}$ , adjoint à droite de  $- \times \Delta \mathbb{N}$ , qui détermine un unique morphisme de préfaisceau

$$g : \Delta B \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\Delta \mathbb{N}}. \quad (3.4)$$

**Lemme 3.3.5.** *Le morphisme  $g$  est un monomorphisme.*

*Preuve.* Il s'agit de montrer que pour tout  $(C, p) \in \mathbf{P}$ , l'application ensembliste  $g(C, p) : B \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\Delta \mathbb{N}}$  est injective. Rappelons alors que par construction (cf. Section 2.7), une exponentiation  $G^F$  de préfaisceau est définie sur chaque objet  $X$  comme l'ensemble  $G^F X$  des transformations naturelles  $\mathbf{y}_X \times F \rightarrow G$ . Ainsi, pour tout  $(C, p) \in \mathbf{P}$ ,  $\Omega_{\neg\neg}^{\Delta \mathbb{N}}(C, p)$  est l'ensemble des transformations naturelles  $\mathbf{y}_{(C, p)} \times \Delta \mathbb{N} \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$ . Ainsi, pour chaque élément  $b \in B$ , on a

$$g(C, p)(b) : \mathbf{y}_{(C, p)} \times \Delta \mathbb{N} \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$$



la transformation naturelle définie pour tout  $(C', p') \in \mathbf{P}$ ,  $(C', p') \leq (C, p)$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , par (voir description des flèches caractéristiques dans la preuve de Proposition 2.6.3)

$$\begin{aligned} g(C, p)(b)_{(C', p')}(n) &= f(C, p)(b, n) = \chi_A(b, n) \\ &= \{(D, q) \leq (C', p') \mid (b, n) \in D \text{ et } q(b, n) = 0\}. \end{aligned}$$

(Pour  $(C', p') \not\leq (C, p)$ , on a bien sûr  $g(C, p)(b)_{(C', p')}: \emptyset \rightarrow \Omega_{\neg\neg}(C', p')$ , trivialement injective.)

Pour  $b \neq c \in B$ , on peut alors trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(b, n), (c, n) \notin C$  (les conditions de forcing sont à support fini). Construisant  $(D, q)$  la condition de forcing sur  $D = C \cup \{(b, n), (c, n)\}$  définie par  $q \upharpoonright_C = p$ ,  $q(b, n) = 0$  et  $q(c, n) = 1$ , on a  $(D, q) \in g(C, p)(b)_{(C, p)}(n)$  et  $(D, q) \notin g(C, p)(c)_{(C, p)}(n)$ , montrant ainsi  $g(C, p)(b) \neq g(C, p)(c)$ . Ce qui conclut.  $\square$

*Remarque.* Rappelant que  $\Delta\mathbb{N}$  est l'objet  $\underline{\mathbf{N}}$  des entiers naturels du topos  $\widehat{\mathbf{P}}$  (cf. Section 3.2), on vient de construire un monomorphisme  $\Delta B \rightarrow \Omega^{\underline{\mathbf{N}}}$  (on procède comme pour  $g$  sans corestreindre  $\chi_A$  à  $\Omega_{\neg\neg}$  au préalable). Comme de plus l'injection  $\mathbb{N} \rightarrow B$  induit trivialement un monomorphisme  $\underline{\mathbf{N}} \rightarrow \Delta B$ , on a la situation

$$\underline{\mathbf{N}} \rightarrow \Delta B \rightarrow \Omega^{\underline{\mathbf{N}}}.$$

C'est la première étape annoncée de notre preuve de Théorème 3.3.1 ! Ou presque : le monomorphisme de droite peut a priori être épimorphique. Cela importe peu : il y a  $\Delta\mathcal{P}(\mathbb{N})$  strictement entre  $\underline{\mathbf{N}}$  et  $\Delta B$  qui donne

$$\underline{\mathbf{N}} \xrightarrow{\simeq} \Delta\mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{\simeq} \Omega^{\underline{\mathbf{N}}}. \quad (3.5)$$

On répète qu'on ne s'arrête pas à ce topos  $\widehat{\mathbf{P}}$  (violant clairement l'hypothèse du continu dans Eq. (3.5)) car il est non booléen : ce n'est pas un *bon* modèle de ZFC, au sens où sa logique interne est intuitionniste et non classique. Encore une fois, on reste évasif et intuitif quant à ces concepts. Une formulation claire requerrait l'introduction du *langage de Mitchell-Bénabou* ( $\simeq$  langage du premier ordre dans un topos) et de la *sémantique de Kripke-Joyal* ( $\simeq$  satisfaction des structures du premier ordre dans les topos), et par conséquent dépasserait de beaucoup l'ambition de ce document.

Il nous reste maintenant à *pousser tout le monde* dans l'univers classique  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg\neg})$ . On utilise bien entendu la faisceautisation introduite en Section 2.5. Afin d'alléger les notations, on note  $\hat{S}$  le faisceau  $a\Delta S$  pour tout ensemble  $S$ . En particulier, on a vu (cf. Proposition 3.2.2) que  $\hat{\mathbb{N}}$  est l'objet des entiers naturels de  $\text{Sh}(\mathbf{P}, J_{\neg\neg})$  : on le note dorénavant  $\mathbf{N}$ .

**Proposition 3.3.6.** *Le morphisme de faisceau*

$$m := a(g): \hat{B} \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{N}}$$

*est un monomorphisme du topos de Cohen.*

---

3. Ou plutôt la flèche  $(D, q) \leq (C, p)$  de  $\mathbf{P}$ .

*Preuve.* Le foncteur de faisceautisation  $a$  a été montré exact à gauche (cf. Lemme 2.5.8), donc préserve les monomorphismes. Aussi la seule chose à montrer est-elle l'isomorphisme  $a(\Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\Delta\mathbb{N}}) \simeq \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}$ . Il vient d'un jeu d'adjonction : pour tout préfaisceau  $X$ ,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{P}}}(X, \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\Delta\mathbb{N}}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{P}}}(X \times \Delta\mathbb{N}, \Omega_{\rightarrow\rightarrow}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathbf{P}, J_{\rightarrow\rightarrow})}(a(X \times \Delta\mathbb{N}), \Omega_{\rightarrow\rightarrow}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathbf{P}, J_{\rightarrow\rightarrow})}(aX \times \mathbf{N}, \Omega_{\rightarrow\rightarrow}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathbf{P}, J_{\rightarrow\rightarrow})}(aX, \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{P}}}(X, \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

(Le premier isomorphisme vient de l'adjonction  $(- \times \Delta\mathbb{N} \dashv (-)^{\Delta\mathbb{N}})$  ; le deuxième de l'adjonction  $a \dashv i$  et de ce que  $\Omega_{\rightarrow\rightarrow}$  est un faisceau ; le troisième de l'exactitude à gauche de  $a$  ; le quatrième de l'adjonction  $- \times \mathbf{N} \dashv (-)^{\mathbf{N}}$  dans  $\mathrm{Sh}(\mathbf{P}, J_{\rightarrow\rightarrow})$  ; le cinquième enfin de l'adjonction  $a \dashv i$  de nouveau.)

Par définition, ces isomorphismes sont naturels en  $X$ , et on a donc finalement

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{P}}}(-, \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\Delta\mathbb{N}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbf{P}}}(-, \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}).$$

Par le lemme de Yoneda, cela équivaut à  $\Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\Delta\mathbb{N}} \simeq \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}$ . Comme de plus  $\Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\Delta\mathbb{N}}$  est déjà un faisceau (cf. Lemme 2.7.1), on a l'isomorphisme voulu.  $\square$

Comme énoncé dans la preuve ci-dessus, le foncteur de faisceautisation  $a$ , exact à gauche, préserve les monomorphismes : en particulier le monomorphisme  $\mathbb{N} \rightarrow B$  de **Sets** induit un monomorphisme évident  $\Delta\mathbb{N} \rightarrow \Delta B$  qui est donc préservé en un monomorphisme  $\mathbf{N} \rightarrow \hat{B}$ . Combiné à Proposition 3.3.6, on a une suite de monomorphismes :

$$\mathbf{N} \rightarrow \hat{B} \xrightarrow{m} \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}.$$

C'est quasiment la situation de Théorème 3.3.1. Il suffirait de montrer qu'aucun des deux monomorphismes ci-dessus n'est épimorphique. Malheureusement, cela n'est pas assurée par la construction faite. Premièrement, le monomorphisme  $m$  de droite peut a priori être un isomorphisme, empêchant  $\hat{B}$  d'être le  $K$  du théorème. Ensuite, il se pourrait que le monomorphisme de gauche soit devenu, sous l'action de  $a$ , un isomorphisme. Qu'à cela ne tienne : la suite de monomorphismes  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow B$  de **Sets** induit la suite de monomorphisme

$$\mathbf{N} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \rightarrow \hat{B} \xrightarrow{m} \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}.$$

C'est alors  $\widehat{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$  qui va être le  $K$  cherché. En effet, on peut montrer que l'absence d'épimorphismes  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow B$  est conservé par  $\hat{\cdot}$ . Ainsi, notant  $X < Y$  pour « il existe un monomorphisme  $X \rightarrow Y$  mais aucun épimorphisme  $X \rightarrow Y$  », on a

$$\mathbf{N} < \widehat{\mathcal{P}(\mathbb{N})} < \hat{B} \rightarrow \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}},$$

montrant notamment <sup>4</sup>

$$\mathbf{N} < \widehat{\mathcal{P}(\mathbb{N})} < \Omega_{\rightarrow\rightarrow}^{\mathbb{N}}.$$

4. Bien que trivial dans **Sets**, cela n'est pas tout à fait immédiat dans  $\mathrm{Sh}(\mathbf{P}, J_{\rightarrow\rightarrow})$  et repose fortement sur la booléanité du topos.

# Bibliographie

- [AGV72] M Artin, A Grothendieck, and JL Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4)*, volume 269. Springer, 1972.
- [Law64] F. William Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A*, 52 :1506–1511, 1964.
- [MM92] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic : A First Introduction to Topos Theory*. Springer, 1992.
- [nLa13] nLab. <http://www.ncatlab.org>, 2013.
- [Sta13] The Stacks Project Authors. Stacks project. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2013.
- [Wat75] William C Waterhouse. Basically bounded functors and flat sheaves. *Pacific J. Math*, 57(2) :597–610, 1975.