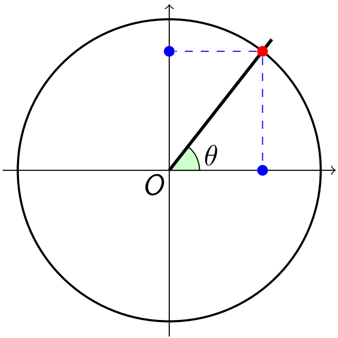
Mathématiques Avancées

Semaine 9

20 novembre 2013

Angles et cercle trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M(\theta)$ le point d'intersection du cercle trigonométrique et de la demi-droite d'angle θ par rapport à l'axe des abscisses. On note $e^{\mathbf{i}\theta}$ le complexe associé à $M(\theta)$.



Écriture exponentielle

Exemple

- On a $e^{\mathbf{i}0} = e^{\mathbf{i}2\pi} = 1$ et $e^{\mathbf{i}\pi} = e^{-\mathbf{i}\pi} = -1$.
- On a $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \mathbf{i}$ et $e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = e^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathbf{i}$.

Théorème

1. *Pour tout réel θ on a $e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$.*
2. *Quels que soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $e^{\mathbf{i}(\theta+2\pi n)} = e^{\mathbf{i}\theta}$.*

Évaluation des fonctions trigonométriques

Rappel : valeurs à retenir

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour les autres valeurs, on utilise les symétries du cercle.

Exemple

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Écriture exponentielle

Théorème

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

1. *il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\, e^{\mathbf{i}\theta}$. On dit alors que θ est* ***un*** *argument de z ;*
2. *si θ et θ' sont deux arguments de z, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \theta' = 2\pi n$.*

Exemple (argument de $z = \frac{\sqrt{6}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}$)

On commence par le module $|z| = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \sqrt{2}$, puis

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6} = e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$$

Écriture exponentielle

Écriture exponentielle

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme

$$z = r\, e^{\mathbf{i}\theta}$$

avec $r > 0$ son module et $\theta \in \mathbb{R}$ un argument.

Remarques

- le module r est unique car c'est $|z|$
- θ est seulement « unique » modulo 2π
- il y a un unique $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ appelé *argument principal*

Formules d'addition des angles

Principe (admis)

La multiplication par $e^{\mathbf{i}\theta}$ s'identifie (dans le plan $\mathcal{P}$) à la rotation d'angle θ par rapport à l'origine.

Théorème

Pour tous réels θ, θ' et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$e^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathbf{i}\theta} \times e^{\mathbf{i}\theta'}, \qquad \left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = e^{\mathbf{i}n\theta}$$

Exercice ✎

Réécrire ce théorème en termes de propriétés des fonctions trigonométriques cos et sin.

Exercices

Exercice ✎

Déterminer le module et un argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathbf{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(on pourra commencer par z^2).

Exercice ✎

Donner le module et un argument des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1+\mathbf{i}, \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Linéarisation de cos et sin

Exercice ✎

1. Prouver les formules d'Euler : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}$$

2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \qquad (\sin\theta)^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2},$$

$$(\sin\theta)^3 = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta).$$

Exercices

Exercice ✎

Déterminer le module et un argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathbf{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(on pourra commencer par z^2).

Exercice ✎

Donner le module et un argument des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1+\mathbf{i}, \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Des sommes trigonométriques

Exercice ✎

Pour tout entier $n \geq 0$ on considère

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

En faisant apparaître une somme de suite géométrique dans $C_n + \mathbf{i}S_n$, simplifier ces expressions (selon la valeur de x).

Exercice ✎

Simplifier de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

Addition des $e^{\mathbf{i}\theta}$

La multiplication est facile mais l'addition...

Exercice ✎

En utilisant (et prouvant) les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}},$$

démontrer que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$e^{\mathbf{i}\alpha} + e^{\mathbf{i}\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

et donner de même une forme factorisée de $e^{\mathbf{i}\alpha} - e^{\mathbf{i}\beta}$.

Application à l'intégration

Laquelle de ces intégrales est la plus difficile à calculer ?

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x)\, dx \qquad \text{ou} \qquad \int_0^{\pi/3} (\sin(x))^3\, dx$$

Un bref rappel

Pour tout entier $n \geq 1$,

- une primitive de $x \mapsto \cos(nx)$ est $\dfrac{\sin(nx)}{n}$
- une primitive de $x \mapsto \sin(nx)$ est $\dfrac{-\cos(nx)}{n}$

Exemple

On obtient donc

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3x)\, dx = ?$$

Un problème ?

Comment trouver des primitives pour $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$?

Idée : linéarisation

Utiliser les formules d'Euler pour transformer l'expression en une somme de termes de la forme $\lambda \cos(kx)$ ou $\lambda \sin(kx)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et k entier.

Exemple

Pout tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(\sin(x))^3 = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

Exercices

Exercice ✎

Démontrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$(\cos(\theta))^2 = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \qquad (\sin(\theta))^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.$$

Exercice ✎

Montrer que

$$\int_0^{\pi} \sin(x)(\cos(x))^2 \, dx = \frac{2}{3}$$