Mathématiques Avancées

Semaine 8

13 novembre 2014

Partie I

Rappels du cours précédent

Racines carrées

Définition

Soit $c \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de c toute solution de l'équation $z^2 = c$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

On va voir qu'il y en a toujours 2, sauf si $c = 0$.

Exemple

Les complexes $\mathbf{i}$ et $-\mathbf{i}$ sont des racines carrées de -1.

Attention !

Le symbole $\sqrt{c}$ est **interdit** si c n'est pas un réel positif.

Méthode de calcul

Soit $c = a + \mathbf{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode de résolution de $z^2 = c$ dans $\mathbb{C}$

1. On écrit $z = x + \mathbf{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
2. L'équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z^2) = a \\ \mathrm{Im}(z^2) = b \\ |z^2| = |c| \end{cases} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

3. On obtient facilement x^2 et y^2
4. L'équation $2xy = b$ indique si x et y sont de même signe

Exemple de calcul

Exemple (racines carrées de $c = 12 + 5\mathbf{i}$)

Le complexe $z = x + \mathbf{i}y$ vérifie $z^2 = c$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = 5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{144 + 25} = 13 \end{cases}$$

On trouve $x^2 = \dfrac{25}{2}$ et $y^2 = \dfrac{1}{2}$. L'équation $2xy = 5$ montre que x et y doivent être de même signe. Finalement les racines carrées de c sont

$$\frac{5 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad -\frac{5 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}$$

Exercices d'entraînement

Exercice ✎

Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres suivants :

- $1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$,
- $8 - 6\mathbf{i}$,
- $8\mathbf{i} - 6$,
- 100,
- -100,
- $3 + 4\mathbf{i}$.

Partie II

Équations du second degré

Résolution d'équations du second degré

Rappel

Dans $\mathbb{R}$, la résolution d'une équation du second degré se ramène à calculer les racines carrées du discriminant.

Résolution dans $\mathbb{C}$

Soient a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$. La résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0$$

suit le même schéma que dans $\mathbb{R}$, la seule différence étant le calcul de racines carrées complexes.

Rappel : résolution théorique dans $\mathbb{R}$

Puisque $a \neq 0$, la « règle du produit nul » entraîne que l'équation est équivalente à

$$4a^2\,x^2 + 4ab\,x + 4ac = 0, \qquad \text{(on a fait } \times 4a\text{)}$$

ce qui se réécrit

$$(2a\,x + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Question-clef

Est-ce que $\Delta = b^2 - 4ac$ est le carré d'un réel ?

Rappel : disjonction de cas dans $\mathbb{R}$

Premier cas

Si Δ n'est pas le carré d'un réel, c'est à dire $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Second cas

S'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta = \delta^2$, l'équation se réécrit

$$(2a\,x + b + \delta)(2a\,x + b - \delta) = 0$$

dont les solutions sont $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$.

Nouveau ! résolution théorique dans $\mathbb{C}$

Puisque $a \neq 0$, la « règle du produit nul » entraîne que l'équation est équivalente à

$$4a^2 z^2 + 4ab\,z + 4ac = 0, \qquad \text{(on a fait } \times 4a\text{)}$$

ce qui se réécrit

$$(2a\,z + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Question-clef

Est-ce que $\Delta = b^2 - 4ac$ est le carré d'un **complexe** ?

Nouveau ! disjonction de cas dans $\mathbb{C}$?

Le premier cas n'existe pas

Tout $\Delta \in \mathbb{C}$ admet deux racines carrées δ et $-\delta$ dans $\mathbb{C}$ (qui sont égales ssi $\Delta = 0$). On sait même les calculer.

Cas général

Soient $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\Delta = \delta^2$, l'équation se réécrit

$$(2az + b + \delta)(2az + b - \delta) = 0$$

dont les solutions sont $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$.

Application

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8z\sqrt{3} - 5\mathbf{i} = 0$.

Discrimant : $(8\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times (-5\mathbf{i}) = 16\,(12 + 5\mathbf{i})$

Ses racines carrées sont : $\pm\delta$ avec $\delta = 4 \times \frac{5+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$

Solutions de l'équation : $\frac{-8\sqrt{3}\pm\delta}{2\times 4}$, c'est à dire

$$\frac{5\sqrt{2}}{4} - \sqrt{3} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{5\sqrt{2}}{4} - \sqrt{3} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Pour s'entraîner

Exercice ✎

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - (2 + 6\mathbf{i})z + 2\mathbf{i} - 5 = 0, \tag{1}$$

$$(3 - \mathbf{i})z^2 + (2 - 3\mathbf{i})z - 1 = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{i}z^2 - z + 2\mathbf{i} = 0. \tag{3}$$

Exercice ✎

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ puis en déduire les solutions de l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

Partie III

Exponentielle imaginaire

Liens entre complexes et géométrie

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ de la façon suivante :

Définition

À tout point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) on associe le complexe $z_M = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$, son *affixe*.

Exemple

Le point $(1, 0)$ a pour affixe 1 alors que $(0, 1)$ a pour affixe $\mathbf{i}$.

Distances

Exemple

La distance entre deux points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ est

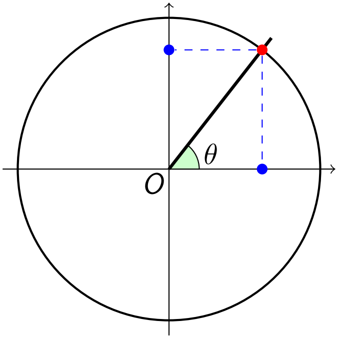
$$MM' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = |z_M - z_{M'}|$$

Exemple

Que représente $|z_M|$ du point de vue géométrique ? à quoi s'identifie l'ensemble des nombres complexes de module 1 ?

Angles et cercle trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M(\theta)$ le point d'intersection du cercle trigonométrique et de la demi-droite d'angle θ par rapport à l'axe des abscisses. On note $e^{\mathbf{i}\theta}$ le complexe associé à $M(\theta)$.



Écriture exponentielle

Exemple

- On a $e^{\mathbf{i}0} = e^{\mathbf{i}2\pi} = 1$ et $e^{\mathbf{i}\pi} = e^{-\mathbf{i}\pi} = -1$.
- On a $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \mathbf{i}$ et $e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = e^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathbf{i}$.

Théorème

1. *Pour tout réel θ on a $e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$.*
2. *Quels que soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $e^{\mathbf{i}(\theta+2\pi n)} = e^{\mathbf{i}\theta}$.*

Évaluation des fonctions trigonométriques

Rappel : valeurs à retenir

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour les autres valeurs, on utilise les symétries du cercle.

Exemple

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Écriture exponentielle

Théorème

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

1. *il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\, e^{\mathbf{i}\theta}$. On dit alors que θ est **un** argument de z ;*
2. *si θ et θ' sont deux arguments de z, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \theta' = 2\pi n$.*

Exemple (argument de $z = \frac{\sqrt{6}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}$)

On commence par le module $|z| = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \sqrt{2}$, puis

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6} = e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$$

Dimensions (par Jos Leys - Étienne Ghys - Aurélien Alvarez), chapitres 5 et 6

`http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm`