Mathématiques avancées

Semaine 6

23 octobre 2014

Partie I

Correction d'exercices

Récurrence et conditions initiales

Exercice important ✎

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ avec $\alpha \neq 0$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n = 0$$
$$\alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma v_n = 0$$

1. On suppose que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{« } u_n = v_n \text{ et } u_{n+1} = v_{n+1} \text{ »}$$

2. En déduire que les suites u et v sont égales si et seulement si $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.

Suites à la Fibonacci

Rappels sur le problème des lapins

On a $B(0) = 1, A(0) = 0, B(1) = 0, A(1) = 1$ et $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$A(m+2) = A(m+1) + A(m)$$
$$B(m+2) = B(m+1) + B(m)$$

L'équation associée $x^2 - x - 1 = 0$ a deux racines réelles :
$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$.

Exercice ✎

Donner une expression des nombres de lapins $B(m)$ et $A(m)$ en fonction de m. *(les conditions initiales changent)*

Une autre application

Exercice ✎

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner une expression de l'unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Dans l'autre sens

Exercice ✎

On pose $u_n = \pi^n\sqrt{2} - e^n$ pour tout entier n. Trouver des réels α, β, γ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n = 0$.

Exercice ✎

Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre

$$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n \text{ est un entier.}$$

Partie II

Reprise du cours

Conjugué et module

Théorème (règles de calcul)

- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \qquad z - \overline{z} = 2\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(z), \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

- *Pour tout couple* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$
$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

Exercices

Exercice ✎

Donner la partie réelle, la partie imaginaire et le module des nombres complexes suivants :

$$\alpha = (1 - \mathbf{i})^4$$

$$\beta = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \mathbf{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\gamma = \frac{1 + 2\mathbf{i}}{3 + 4\mathbf{i}}$$

$$\delta = -2\left(\frac{3 + \mathbf{i}}{2 - \mathbf{i}}\right)^3$$

Exercice ✎

Montrer que tout complexe est solution du équation du second degré à coefficients réels.

Résolution d'équations du second degré

Rappel du slogan

La résolution d'une équation du second degré se ramène à calculer les racines carrées du discriminant.

Racines carrées

Définition

Soit $c \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de c toute solution de l'équation $z^2 = c$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

On va voir qu'il y en a toujours 2, sauf si $c = 0$.

Exemple

Les complexes $\mathbf{i}$ et $-\mathbf{i}$ sont des racines carrées de -1.

Attention !

Le symbole $\sqrt{c}$ est **interdit** si c n'est pas un réel positif.

Méthode de calcul

Soit $c = a + \mathbf{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode de résolution de $z^2 = c$ dans $\mathbb{C}$

1. On écrit $z = x + \mathbf{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
2. L'équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z^2) = a \\ \mathrm{Im}(z^2) = b \\ |z^2| = |c| \end{cases} \quad \text{c.-à-d.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

3. On obtient facilement x^2 et y^2
4. L'équation $2xy = b$ indique si x et y sont de même signe

Exemple de calcul

Exemple (racines carrées de $c = 12 + 5\mathbf{i}$)

Le complexe $z = x + \mathbf{i}y$ vérifie $z^2 = c$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = 5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{144 + 25} = 13 \end{cases}$$

On trouve $x^2 = \dfrac{25}{2}$ et $y^2 = \dfrac{1}{2}$. L'équation $2xy = 5$ montre que x et y doivent être de même signe. Finalement les racines carrées de c sont

$$\frac{5 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad -\frac{5 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}$$

Exercices d'entraînement

Exercice ✎

Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres suivants :

- $1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$,
- $8 - 6\mathbf{i}$,
- $8\mathbf{i} - 6$,
- 100,
- -100,
- $3 + 4\mathbf{i}$.