# Mathématiques Avancées

Semaine 5

16 octobre 2014

# Partie I

## Précédemment...

# Quelques mots-clefs

- équation
- solution d'une équation
- existence de solution
- unicité des solutions
- exemples importants : $-a$, $\sqrt{a}$
- résoudre une équation
- raisonnement par analyse-synthèse
- équations réelles de degré 2

# Exercice : inverse d'un réel

Soit $a, b$ deux entiers.

1. Le nombre $\frac{a}{b}$ est défini par une équation. Laquelle ?
2. Y a-t-il unicité pour cette équation ?
3. Y a-t-il toujours existence ?

**Application**

Complétez et démontrez la règle d'addition des fractions

$$\text{Si } \ldots, \quad \text{alors} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \ldots$$

# Exercice : addition des fractions

## Énoncé

Soient $a, b, c, d$ des entiers avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Montrer que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Partie II

# Suite récurrentes linéaires d'ordre 2

# Lapins de Fibonacci (1175-1250)

Partant de plusieurs lapins et d'une seule lapine :

- Combien aura-t-on de lapines au bout de 2 ans ?
- Au bout de combien de temps aura-t-on 1 000 lapines ?

# Les lapins de Fibonacci (1175-1250)

## Règles (pas très réalistes)

1. À un instant 0, on achète 1 lapine jeune (et des mâles).
2. Une lapine jeune met 1 mois pour devenir adulte.
3. Une lapine adulte engendre une lapine jeune par mois.

## Questions

- Combien aura-t-on de lapines au bout de 2 ans ?
- Au bout de combien de temps aura-t-on 1 000 lapines ?

# Lapins de Fibonacci : premières valeurs

| Mois | #Jeunes | #Adultes |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 5 |
| 6 | 5 | 8 |
| 7 | 8 | 13 |
| 8 | 13 | 21 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Au mois $m$ on note :

- $A(m)$ le nombre d'adultes
- $B(m)$ le nombre d'enfants

**Formules de récurrence**

Pour tout $m$ on a :

$$B(m+1) = A(m)$$
$$A(m+1) = A(m) + B(m)$$

# Formules de récurrence

Ainsi, $B(m)$ et $A(m)$ vérifient les formules de récurrence

$$\begin{aligned} B(m+1) &= A(m) \\ A(m+1) &= A(m) + B(m) \end{aligned}$$

On déduit que, pour $m$ on a

$$\begin{aligned} A(m+2) &= A(m+1) + A(m) \\ B(m+2) &= B(m+1) + B(m) \end{aligned}$$

# Formules de récurrence

Si $L(m) = A(m) + B(m)$ est le nombre total de lapines, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad L(m+2) = L(m+1) + L(m)$$

**Suivez-vous ?**

- Les suites $B(m), A(m), L(m)$ vérifient la même formule de récurrence. Sont-elles pour autant égales ?
- La formule de récurrence suffit-elle à retrouver tous les termes de la suite ?

Non ! car elle n'ont pas la même valeur pour $m = 0$ et $m = 1$.

# Récurrence et conditions initiales

## Exercice important ✎

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ avec $\alpha \neq 0$ et soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n = 0$$
$$\alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma v_n = 0$$

1. On suppose que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   « $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$ »

2. En déduire que les suites $u$ et $v$ sont égales si et seulement si $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.

# Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

## Question

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. À quelle condition la suite géométrique de terme général $u_n = q^n$ vérifie-t-elle la formule de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n = 0 \qquad ?$$

## Réponse

Une condition nécessaire et suffisante est que $q$ est solution de l'équation $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ d'inconnue $x$.

# Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \tag{1}$$

**Théorème**

*Supposons que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes $\lambda, \mu$ dans $\mathbb{R}$. Alors les suites vérifiant (1) sont exactement celles qui s'écrivent*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\,\lambda^n + B\,\mu^n$$

*où $A, B$ sont deux constantes à déterminer avec $u_0$ et $u_1$.*

# Retour aux lapins

## Nombre de lapins

Formule de récurrence : $L(m+2) = L(m+1) + L(m)$

1. Ceci se réécrit $L(m+2) - L(m+1) - L(m) = 0$
2. On résout l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$. Il y a deux solutions réelles distinctes

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

3. D'après le théorème, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad L(m) = A\,\varphi^m + B\,\psi^m$$

# Détermination des constantes

On doit avoir $L(0) = L(1) = 1$, c'est à dire

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\varphi + B\psi = 1 \end{cases}$$

L'unique couple solution est donné par

$$A = \frac{1-\psi}{\varphi-\psi} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}, \qquad B = \frac{\varphi-1}{\varphi-\psi} = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$$

Finalement on a pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$L(m) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{m+1} \right]$$

# Deux réponses pour l'élevage

## Combien aura-t-on de lapines au bout de 2 ans ?

$$L(24) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{25} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{25}\right] = 75025$$

$$L(m) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{m+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{m+1} \right]$$

**Au bout de combien de temps aura-t-on 1 000 lapines ?**

Comme $|\psi| < 1$ le second terme devient négligeable.
On l'oublie en première approximation.
On commence donc par résoudre $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{m+1} \geq 1000$ ce qui donne $m > 15$. On vérifie précisément que $L(15) = 987$ et $L(16) = 1597$, il faut donc attentre 1 an et quatre mois.

# À votre tour !

**Exercice** ✎

Donner une expression des nombres de lapines $B(m)$ et $A(m)$ en fonction de $m$. *(attention aux conditions initiales)*

## Exercice

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner une expression de l'unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$ vérifiant

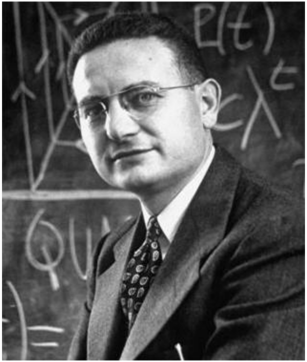
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

## Exercice

Trouver une formule de récurrence pour la suite de terme général $u_n = \pi^n\sqrt{2} - e^n$.

# Et en économie ?

Modèle de l'oscillateur de Samuelson (Prix Nobel, 1970).



# Un exemple

## Une suite avec des "cycles"

Considérons la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

Premières valeurs :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | ... |

**Peut-on donner une formule pour $u_n$ ?**

L'équation associée $x^2 - x + 1 = 0$ a un discriminant

$$\Delta = -3 < 0$$

Notre méthode échoue car cette équation n'a pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$. Que manque-t-il ?

# Partie III

# Nombres complexes

# Ensemble des nombres complexes

### Théorème (admis)

*Il existe un ensemble* $\mathbb{C}$ *contenant* $\mathbb{R}$, *muni d'opérations* $+$ *et* $\times$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Les opérations* $+$ *et* $\times$ *sur* $\mathbb{C}$ *suivent les même règles de calcul que sur* $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{C}$ *contient un élément* $\mathbf{i}$ *vérifiant* $\mathbf{i}^2 = -1$
3. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *il existe un unique couple* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z = a + \mathbf{i}b$. *On appelle* $a = \mathrm{Re}(z)$ *la partie réelle et* $b = \mathrm{Im}(z)$ *la partie imaginaire.*

**Exemple**

Comment simplifier le nombre complexe $(1 - \mathbf{i})^4$ ?

# Conjugué et module

## Définition

Soit $z = a + \mathbf{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle :

- conjugué de $z$ le complexe $\overline{z} = a - \mathbf{i}b$
- module de $z$ le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

## Exemple

Pour $z = 1 - \mathbf{i}$ on a $\overline{z} = $ ____$1 + \mathbf{i}$ et $|z| = $ ___$\sqrt{2}$.

## Exercice ✎✎

Démontrer que tout nombre complexe est solution d'une équation du second degré à coefficients réels.

# Conjugué et module

## Théorème (règles de calcul)

- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \qquad z - \overline{z} = 2\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(z), \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

- *Pour tout couple* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$
$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

# Exercices

## Exercice ✎

Donner la partie réelle, la partie imaginaire et le module des nombres complexes suivants :

$$\alpha = (1 - \mathbf{i})^4$$

$$\beta = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \mathbf{i}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\gamma = \frac{1 + 2\mathbf{i}}{3 + 4\mathbf{i}}$$

$$\delta = -2\left(\frac{3 + \mathbf{i}}{2 - \mathbf{i}}\right)^3$$