Mathématiques Avancées

Équations polynomiales et polynômes

9 octobre 2014

Introduction

Les équations apparaissent naturellement dans la résolution de problèmes.

Exemple

Alice a un capital de 50 000 \$ composé à 99% d'actions, le reste étant placé sur un livret A. Une crise survient, les actions sont dévaluées, mais le banquier annonce à Alice qu'elles représentent encore 98% de son capital. Doit-elle s'inquiéter ?

Exemple

Quel est le format d'une feuille A4 ? Pourquoi ?

Partie I

Généralités sur les équations

Qu'est-ce qu'une équation ?

Latin *æquatio* : égalisation

Définition

Soit x une variable. Un équation d'inconnue x est une proposition qui dépend de x et qui exprime une égalité.

Exemple

$$59 \times t^{43} + \sqrt{t-5} = \frac{42}{t}$$

est une équation d'inconnue $\_\_t$.

Qu'est-ce qu'une équation ?

Remarque

Une inconnue peut être

- un nombre
- un couple de nombres : équation à "deux inconnues"
- un triplet de nombres, etc
- une fonction : équation "fonctionnelle"
- etc.

Qu'est ce qu'une solution ?

Rappel : une proposition peut être vraie ou fausse.

Définition

Soit $E(x)$ une équation d'inconnue x. Une solution de $E(x)$ est une valeur s telle que $E(s)$ est vérifiée.

Exemple

L'équation d'inconnue α,

$$\alpha^{2014} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3\alpha}}$$

admet __1 comme solution.

Qu'est ce qu'une solution ?

À toujours avoir en tête !

- Une équation peut ne pas avoir de solution.
- Une équation peut avoir plusieurs solutions.

Exemple

- Équation $(u+1)^2-(u-1)^2=4u$ d'inconnue u
- Équation $3(n+2)=3n+5$ d'inconnue n

Existence et unicité des solutions

Définition (Existence)

L'équation a au moins une solution : $\exists x, E(x)$

Définition (Unicité)

L'équation a au plus une solution :

$$\forall x, \forall y, \quad (E(x) \text{ et } E(y)) \implies x = y$$

Notation « il existe une unique solution » : $\exists! x, E(x)$

Opposé d'un réel

Soit a un nombre réel.

1. Le nombre $-a$ est défini par une équation. Laquelle ?
2. Y a-t-il unicité ?

Application

Démontrez que pour tout réel a, on a $-(-a) = a$.

Inverse d'un réel

Soit a un réel.

1. Le nombre $\dfrac{1}{a}$ est défini par une équation. Laquelle ?
2. Y a-t-il unicité pour cette équation ?
3. Y a-t-il toujours existence ?

Application

Complétez et démontrez la règle d'addition des fractions

$$\text{Si } \dots, \quad \text{alors} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \dots$$

Racine carrée

Soit a un réel.

1. Le nombre $\sqrt{a}$ est défini par une équation. Laquelle ?
2. Y a-t-il unicité pour cette équation ?
3. Y a-t-il toujours existence ?

Application

Soient a, b deux réels positifs. Les règles suivantes sont-elles justes ?

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \quad \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Qu'est ce que résoudre

Définition

Soit $E(x)$ une équation et A un ensemble. Résoudre dans A l'équation $E(x)$, c'est expliciter l'ensemble de ses solutions qui sont dans A. On le note $\{s \in A : E(s)\}$.

Exemple (règle du « produit nul »)

Résolution de l'équation $a \times b = 0$ d'inconnues (a, b) dans $\mathbb{R}^2$: les solutions sont les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x = 0$ ou $y = 0$.

Un schéma de résolution typique

Raisonnement par analyse-synthèse

Analyse	Soit $x \in A$ une solution de E. On montre que x appartient nécessairement à un certain ensemble S (à déterminer).
Synthèse	On vérifie que les éléments de S sont bien des solutions de E.
Conclusion	L'ensemble des solutions de E dans A est S.

Remarque : ceci correspond à la démonstration de

$$\forall x,\ (x \in A \text{ et } E(x) \iff x \in S)$$

Second degré, exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$(452 - 77x)^2 = -123$$

Second degré, exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$(452 - 77x)^2 = 0$$

Second degré, exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$(452 - 77x)^2 = 11^2$$

Second degré, cas général

Théorème

Soient a, b, c des réels avec $a \neq 0$. La résolution de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dans $\mathbb{R}$ peut toujours se ramener à un des trois exemples.

Démonstration

Puisque $a \neq 0$, la « règle du produit nul » entraîne que l'équation est équivalente à

$$4a^2x^2 + 4ab + 4ac = 0, \qquad (\text{on a fait } \times 4a)$$

ce qui se réécrit

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Question-clef

Est-ce que $\Delta = b^2 - 4ac$ est le carré d'un réel ?

Disjonction de cas

On appelle Δ le discriminant.

Premier cas

Si Δ n'est pas le carré d'un réel, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Second cas

S'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta = \delta^2$, l'équation se réécrit

$$(2ax + b + \delta)(2ax + b - \delta) = 0$$

dont les solutions sont $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$.

Les lapins de Fibonacci (1175-1250)

Partant d'une lapine, et sachant qu'une lapine donne naissance tous les mois à une nouvelle lapine :

- Combien aura-t-on de lapines au bout de 2 ans ?
- Au bout de combien de temps aura-t-on 2014 lapines ?

Les lapins de Fibonacci (1175-1250)

Ceci n'est pas très réaliste : on considère maintenant qu'une lapine met un mois avant de devenir fertile.

- Combien aura-t-on de lapines au bout de 2 ans ?
- Au bout de combien de temps aura-t-on 2014 lapines ?