Mathématiques Avancées

Semaine 3

2 octobre 2014

Partie I

Previously on...

Previously on...

- quantificateur universel $\forall$
- quantificateur existentiel $\exists$
- négation des quantifications
- importance de l'ordre
- raisonnement par l'absurde

Partie II

Raisonnement par récurrence

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel $x \geq -1$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 1$.

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ *et pour tout réel* $x \geq -1$, *on a*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

1. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 1$.
2. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 2$.

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ *et pour tout réel* $x \geq -1$*, on a*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 1$.
2. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 2$.
3. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 3$.

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ *et pour tout réel* $x \geq -1$*, on a*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 1$.
2. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 2$.
3. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 3$.
4. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 4$.

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel $x \geq -1$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 1$.
2. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 2$.
3. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 3$.
4. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 4$.
5. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 5$.

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ *et pour tout réel* $x \geq -1$, *on a*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

1. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 1$.
2. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 2$.
3. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 3$.
4. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 4$.
5. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 5$.
6. etc.

Principe de récurrence

Pour démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)$

Il suffit de suivre les étapes suivantes :

Initialisation : prouver $A(0)$.

Hérédité : montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n) \implies A(n+1)$.

Conclusion : invoquer le principe de récurrence.

Partie III

Exercices

Exercice : une identité *remarquable* ?

Soient x, y deux nombres réels. La proposition

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

est-elle vraie

- pour tout couple (x, y) ?
- pour certains ?
- pour aucun ?

Exercice : le carré d'un rationnel est rationnel

1. Écrire avec des quantificateurs la propriété suivante :

   le carré d'un nombre rationnel est rationnel.

2. Énoncer la négation de cette propriété.
3. Prouver la propriété.

Rappel : négation des quantifications

$\forall$ devient $\exists$

La négation de $\forall x,\ A(x)$ est

$$\exists x,\ (\text{non } A(x))$$

$\exists$ devient $\forall$

La négation de $\exists x,\ A(x)$ est

$$\forall x,\ (\text{non } A(x))$$

Exercice : le carré d'un rationnel est rationnel

1. Écrire avec des quantificateurs la propriété suivante :

   le carré d'un nombre rationnel est rationnel.

2. Énoncer la négation de cette propriété.
3. Prouver la propriété.

Rappel : démontrer un *pour tout*...

Schéma de démonstration

1. Soit x quelconque. Nous allons montrer $A(x)$.
2. ...
   (une preuve de $A(x)$)
   ...
3. Ceci étant vrai quel que soit x, on a prouvé

$$\forall x,\ A(x).$$

Exercice : produit d'un rationnel et d'un irrationnel

1. Écrire avec des quantificateurs la propriété suivante :

   le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.

2. Écrire la négation de cette propriété avec des quantificateurs.
3. Prouver la propriété en raisonnant par l'absurde.

Rappel : raisonnement par l'absurde

Principe : démontrer qu'une proposition est vraie revient à montrer que sa négation est fausse.

Application : Soit A une proposition à démontrer.

1. On fait l'hypothèse non(A).
2. Cette hypothèse entraîne une contradiction.
3. Ceci prouve A.

Exercice : disjonction de cas

1. Que signifie la proposition suivante ?

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q},\ \exists \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \alpha^\beta \in \mathbb{Q}$$

2. Donner sa négation.
3. Prouver la proposition.

Rappel : on a vu que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Rappel : démontrer un *il existe*...

Schéma de démonstration

1. Soit $x =$ .... (on choisit un certain x)
2. ...
   (preuve que $A(x)$)
   ...
3. On a trouvé un x tel que $A(x)$ est vérifiée, donc

$$\exists x, \ A(x)$$

Exercice : nier en bloc

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$$

Exercice : nier en bloc

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

$$\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x > 1,\ f(x) > M$$

Exercice : nier en bloc

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \implies x \leq 0$$

Exercice : nier en bloc

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Exercice : un grand classique

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice : à peine moins classique

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice : pour les gourmands

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$