Mathématiques Avancées

Semaine 2

25 septembre 2014

Partie I

Rappel du dernier cours

Raisonnement et démonstrations

Quelques mots-clefs :

- hypothèse
- déduction
- implication
- équivalence
- contraposée

Vocabulaire des ensembles

- élément, appartenance
- sous-ensemble, inclusion
- union
- intersection
- différence
- produit cartésien
- ensembles de nombres usuels

Partie II

Négation d'une assertion

Principe général

À toute assertion « A », on associe l'assertion « non(A) ».

Axiome de non contradiction

Si A entraîne simultanément B et non(B), alors on a non(A).

Axiome de double négation

Les assertions non(non(A)) et A sont équivalentes.

Application : raisonner par l'absurde

Idée

Dire que A est vraie revient à dire que non(A) est fausse.

En pratique :

1. On fait l'hypothèse : non(A).
2. On déduit une contradiction de cette hypothèse.
3. Ainsi, on a prouvé non(non(A)).
4. Par équivalence, on a donc prouvé A.

Nier une assertion simple

Négation d'une assertion simple

Si $A =$ « sujet + verbe + complément », alors

$$\text{non}(A) = \text{« sujet} + \textbf{ne} + \text{verbe} + \textbf{pas} + \text{complément »}$$

Exemple

Si $A =$ « l'élément x appartient à l'ensemble E », alors :
non$(A) =$ « l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E »

Nier « et »

Négation d'une conjonction

La négation d'un assertion $A =$ « B **et** C » est :

$$\text{non}(A) = \text{« non}(B) \textbf{ ou } \text{non}(C)\text{ ».}$$

Exemple

La négation de « n est pair **et** n est multiple de 3 » :

« n n'est pas pair **ou** n n'est pas multiple de 3 »

Nier « ou »

Négation d'une disjonction

La négation d'un assertion $A =$ « B **ou** C » est :

$$\text{non}(A) = \text{« non}(B)\ \textbf{et}\ \text{non}(C)\text{ ».}$$

Exemple

Négation de « f est croissante **ou** g est décroissante » :

« f n'est pas croissante **et** g n'est pas décroissante »

Nier « si, alors »

Remarque importante sur l'implication

Les assertions suivantes sont équivalentes :

« **Si** A, **alors** B », « non(A) **ou** B »

Exemple

Avec $A =$ « vous avancez » et $B =$ « je tire » :

« **Si** vous avancez, **alors** je tire »
« Vous *n*'avancez *pas* **ou** je tire »

Nier « si, alors »

Négation d'une implication

La négation de C = « **Si** A, **alors** B » est :

$$\text{non}(C) = \text{« } A \textbf{ et } \text{non}(B) \text{ »}$$

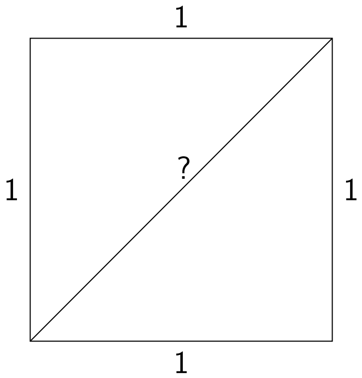
Exemple

Négation de « **Si** n est pair, **alors** n^2 est pair » :

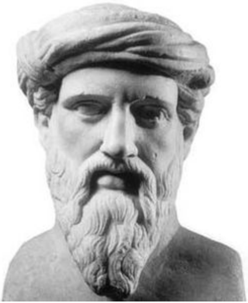
« n est pair **et** n^2 n'est pas pair »

Exercice : un théorème grec

Question préliminaire : quelle est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ?



Un théorème grec : énoncé



Théorème

Il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.
En d'autres termes, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Un théorème grec : démonstration

Supposons la négation et cherchons une contradiction...

Partie III

Quantification des variables

Un problème de généralité

Exemple (question idiote)

Est-il vrai que : « x est un mammifère et x pond des œufs » ?

Réponse : ça dépend de x...

Un problème de généralité

Quand une assertion $A(x)$ fait intervenir une variable x non définie, Il est important de savoir si on parle :

de tous les x ? seulement de certains x ?

On définit deux symboles opposés : $\forall$ et $\exists$.

Quantificateur universel

- Le quatificateur universel est : **pour tout**
- On le symbolise par $\forall$.
- De nombreuses façons de le traduire en français.

Déduire d'un « pour tout »

À partir de :

1. l'hypothèse « $\forall x, A(x)$ »,
2. n'importe quel x,

On peut déduire « $A(x)$ ».

Prouver un « pour tout »

Schéma de démonstration

1. Soit x quelconque. Nous allons montrer $A(x)$.
2. ...
   (une preuve de $A(x)$)
   ...
3. Ceci étant vrai quel que soit x, on a prouvé
   $$\forall x,\ A(x).$$

Nier un « pour tout »

Quel est la négation de l'assertion suivante ?

Tous les exercices de mathématiques sont rébarbatifs.

Quantificateur existentiel

- Le quatificateur existentiel est : **il existe**
- On le symbolise par $\exists$.
- De nombreuses façons de le traduire en français.

Exemples de : il existe ...

Exemple

Il existe un x tel que x est un mammifère et x pond des œufs.

Exemple

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que n est impair et n n'est pas premier.

Déduire d'un « il existe »

À partir de :

- l'hypothèse $\exists x, A(x)$.

On peut déduire :

- il y a (au moins) une valeur de x telle que $A(x)$.

Prouver un « il existe »

Schéma de démonstration

1. Posons $x = ...$ (on fixe une valeur)
2. ...
   (preuve de $A(x)$)
   ...
3. On a trouvé un x tel que $A(x)$ est vérifiée, donc

$$\exists x,\ A(x)$$

Nier un « il existe »

Quel est la négation de la proposition suivante ?

Certains mammifères pondent des œufs.

Nier les quantificateurs

- La négation de $\forall x,\ A(x)$ est : $\exists x,\ (\text{non } A(x))$.
- La négation de $\exists x,\ A(x)$ est : $\forall x,\ (\text{non } A(x))$.

Remarque pratique

Pour prouver la négation d'un « pour tout », un contre-exemple suffit.

Variantes utiles

Lorsque E est un ensemble, on introduit deux pseudo-quantificateurs :

Définition

« Pour tout $x \in E$, $A(x)$ » est une abbréviation de :

« Pour tout x, si $x \in E$ alors $A(x)$ »

Définition

« Il existe $x \in E$ tel que $A(x)$ » est une abbréviation de :

« Il existe x tel que $x \in E$ et $A(x)$ »

Attention à l'ordre

Quand il y a plusieurs quantificateurs, l'ordre est important !

Exercices

Partie IV

Raisonnements particuliers

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel $x \geq -1$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Une inégalité suisse

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ *et pour tout réel* $x \geq -1$, *on a*

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

1. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 1$.
2. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 2$.
3. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 3$.
4. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 4$.
5. Prouver l'inégalité de Bernoulli pour $n = 5$.
6. etc.

Principe de récurrence

Pour démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)$

Il suffit de suivre les étapes suivantes :

Initialisation : prouver $A(0)$.

Hérédité : montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n) \implies A(n+1)$.

Conclusion : invoquer le principe de récurrence.