Mathématiques Avancées

Semaine 12

11 décembre 2014

Partie I

Rappels du cours précédent

Lien entre racines et divisibilité

Proposition

Pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$, *il y a équivalence entre :*

(i) a *est une racine de* P

(ii) *le reste de la division euclidienne de* P *par* $X - a$ *est* 0

(iii) *il existe* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P = (X - a) \times Q$

Conséquences du lien racines-divisibilité

Exercice

Montrer par récurrence que si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont des racines deux à deux distinctes du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)Q$$

Proposition (Corollaire)

Un polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes.

Remarque très importante

Que peut-on dire d'un polynôme qui possède une infinité de racines ?

Plus généralement, que peut-on dire d'un polynôme P de degré $\deg P \leq n$ qui admet $n+1$ racines ?

Propriété fondamentale de $\mathbb{C}$

Théorème (d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme complexe *de degré $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\lambda(X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est son coefficient dominant et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes.

Remarque : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne sont pas forcément distincts.

Partie II

Reprise du cours

Échauffement

Combien de racines $X^2 - 2X + 1$ possède-t-il ?

Racines multiples

Exemple

Le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ est de degré 2 mais n'a qu'une seule racine qui « compte double »

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. Alors a est de multiplicité $m \in \mathbb{N}$ s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - a)^m Q \qquad \text{et} \qquad Q(a) \neq 0$$

On dit que a est racine multiple si $m \geq 2$.

Reconnaître les racines multiples

On part d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et d'un $a \in \mathbb{K}$.

Comment savoir si a est une racine multiple de P ?

Méthode 1 : division euclidienne

Exercice

Soit $Q = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$.
Trouver deux racines « évidentes » de Q et donner leurs multiplicités.

Méthode 2 : polynôme dérivé

Définition

Le polynôme dérivé de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Ceci correspond à la dérivation usuelle des fonctions polynomiales.

Exemple

Pour $P = X^{17} - \frac{1}{2} X^4 + 29$ on a $P' = 17X^{16} - 2X^3$.

Règles de dérivation

Proposition

Si $\deg P \geq 1$, *alors* $\deg(P') = \deg P - 1$.

Proposition

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, *on a*

$$(P+Q)' = P' + Q' \qquad \textit{et} \qquad (P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'.$$

Exercice ✎

Démontrer cette proposition.

Dérivation et racines multiples

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Considérons la division euclidienne suivante dans $\mathbb{K}[X]$:

$$P = (X - a)^2 Q + R, \qquad \deg R < 2$$

Comme $\deg R \leq 1$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $R = \lambda X + \mu$, d'où

$$P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q' + \lambda$$

et donc $P'(a) = \lambda$ ainsi que $P(a) = \lambda a + \mu$. Conclusion :

Théorème

a est racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

Application

Exercice

Soit $Q = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$.
Trouver deux racines « évidentes » de Q et donner leurs multiplicités.

Pour s'entraîner

Exercice ✎

Montrer que 0 est racine double de $(X+1)^{2014} - 2014X - 1$.

Exercice ✎

Combien de racines distinctes possède $X^{2014} - 1$ dans $\mathbb{C}$? On pourra utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice ✎

$\rightarrow$ Voir sur le site `coursenligne` le problème donné l'an dernier.

Bonnes vacances !