Mathématiques Avancées

Semaine 11

4 décembre 2014

Partie I

Division euclidienne

Division euclidienne

Théorème

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $B \neq 0$. *Il existe un unique couple* $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ *solution de*

$$\begin{cases} A = B \times Q + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

On appelle Q *le quotient et* R *le reste.*

Rappel : on a prouvé l'unicité la semaine dernière.

Un premier exemple

Exercice

Donnez le quotient et le reste de la division euclidienne de

$$3X^{2014} + X^{17} + 6X^3 \text{ par } X^{12}.$$

Existence : l'algorithme de la division

1. Si $\deg A < \deg B$, on prend $Q = 0$ et $R = A$.
2. Sinon, on trouve le monôme λX^k tel que :

   $$\deg(A - \lambda X^k B) < \deg A.$$

   (il s'agit d'annuler le terme dominant)
3. On continue la division avec $\tilde{A} = A - \lambda X^k B$ en ajoutant λX^k au quotient obtenu. En d'autres termes,

   $$Q = \lambda X^k + \tilde{Q}, \qquad R = \tilde{R}$$

   avec $(\tilde{Q}, \tilde{R})$ le quotient et le reste de la division de $\tilde{A}$ par B.

Conseil de rédaction

On peut rédiger le calcul d'une division euclidienne comme à l'école primaire.

Exemple

Faire la division de $X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 + 1$.

Pour s'entraîner au calcul

Exercice ✎

Effectuez les divisions euclidiennes suivantes :

- $X^4 - 1$ divisé par $2X + 1$
- $X^{10} - 1$ divisé par $X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$
- $5X^4 + 8X^3 - 2X + 6$ divisé par $-3X^2 + 7$

Parfois, *rien ne sert de courir...*

Exercice ✎

Donner le reste de la divsion euclidienne de :

- $X^4 - 1$ divisé par $2X + 1$
- $(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)X)^n$ par $X^2 + 1$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

Partie II

Substitution de polynômes

Substitution de polynômes

Définition

Si P, Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on définit le polynôme composé $P(Q) \in \mathbb{K}[X]$ par $P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exemple

- Quel que soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(X) = P$
- Si $P = -X^2 + 3$, alors $P(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 3 = 1$ et

$$P(X-1) = -(X-1)^2 + 3 = -X^2 + 2X + 2$$

Remarque sur les fonctions polynomiales

À tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on peut associer une fonction *polynomiale* $f_P \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par substitution de X :

$$\forall t \in \mathbb{K}, \qquad f_P(t) = P(t)$$

Exemple

Quelle fonction est associée au polynôme $4X^{12} + 2014$ de $\mathbb{R}[X]$?

Exercices sur la substitution

Exercice ✎

1. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = X$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$.
3. Adapter la méthode pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice ✎

Montrer que si P et Q sont deux polynômes avec Q non constant,

$$\deg P(Q) = \deg P \times \deg Q$$

Application de la division à l'intégration

Considérons la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{2x + 1}$$

1. Quel est son domaine de définition ?
2. Comment trouver une primitive de f ?
3. Quelle est la 2014ᵉ dérivée de f ?

Mini décomposition en éléments simples

En calculant la division euclidienne, on a vu que

$$X^4 - 1 = (2X+1)\left(\frac{X^3}{2} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{8} - \frac{1}{16}\right) - \frac{15}{16},$$

donc pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$,

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right) - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

Primitive et dérivée

Un exemple de primitive :

$$\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{16} - \frac{15}{32} \log \left| x + \frac{1}{2} \right|$$

Dérivée 2014ᵉ de f :

$$f^{(2014)}(x) = -\frac{15}{32} \cdot \frac{2014!}{(x + \frac{1}{2})^{2015}}$$

Partie III

Racines

Racines d'un polynôme

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Une racine de P dans $\mathbb{K}$ est un élément $a \in \mathbb{K}$ qui vérifie $P(a) = 0$.

« Trouver les racines de P dans $\mathbb{K}$ revient à résoudre l'équation $P(t) = 0$ d'inconnue t dans $\mathbb{K}$ »

Exemple

Soient $a_1, \dots, a_n$ des complexes. Quelles sont les racines du polynôme $(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$ dans $\mathbb{C}$?

Lien entre racines et divisibilité

Proposition

Pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, il y a équivalence entre :

(i) *a est une racine de P*

(ii) *le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 0*

(iii) *il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a) \times Q$*

Exercice ✎

Pourquoi suffit-il de prouver les trois implications $(i) \implies (ii)$ et $(ii) \implies (iii)$ et $(iii) \implies (i)$ pour démontrer le résultat ?
Prouver la proposition en appliquant cette méthode.

Conséquences de lien racines-divisibilité

Exercice ✎

Montrer par récurrence que si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont des racines deux à deux distinctes du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_n)Q$$

Proposition (Corollaire)

Un polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes.

Propriété fondamentale de $\mathbb{C}$

Théorème (d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme complexe de degré $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire sous la forme

$$\lambda(X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_n)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est son coefficient dominant et $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres complexes.

Remarque : $a_1, a_2, \dots, a_n$ ne sont pas forcément distincts.