Mathématiques Avancées

Semaine 10

27 novembre 2014

Partie I

Correction d'exercices

Exercices

Exercice ✎

Donner le module et un argument des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + \mathbf{i}\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 + \mathbf{i}, \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Des sommes trigonométriques

Exercice ✎

Pour tout entier $n \geq 0$ on considère

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

En faisant apparaître une somme de suite géométrique dans $C_n + \mathbf{i}S_n$, simplifier ces expressions (selon la valeur de x).

Addition des $e^{\mathbf{i}\theta}$

La multiplication est facile mais l'addition...

Exercice ✎

En utilisant (et prouvant) les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta}+e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta}-e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}},$$

démontrer que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$e^{\mathbf{i}\alpha}+e^{\mathbf{i}\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

et donner de même une forme factorisée de $e^{\mathbf{i}\alpha}-e^{\mathbf{i}\beta}$.

Application à l'intégration

Exercice ✎

Démontrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$(\cos(\theta))^2 = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \qquad (\sin(\theta))^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.$$

Exercice ✎

Montrer que

$$\int_0^\pi \sin(x)(\cos(x))^2 \, dx = \frac{2}{3}$$

Partie II

Polynômes

Anneau des polynômes

Théorème (ci-dessous, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Il existe un ensemble muni d'opérations $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ tel que :

- $\mathbb{K}[X]$ *contient* $\mathbb{K}$ *et un élément* $X \notin \mathbb{K}$.
- *Les opérations* $+$ *et* $\times$ *sur* $\mathbb{K}[X]$ *vérifient les mêmes règles de calcul que sur* $\mathbb{K}$.
- *Pour tout* $P \in \mathbb{K}[X]$ *non nul, il existe* $d \in \mathbb{N}$ *et* $(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{K}^d$ *tels que* $a_d \neq 0$ *et*

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} + a_d X^d.$$

L'entier d *et le* $(d+1)$*-uplet* $(a_0, \ldots, a_d)$ *sont* ***uniques***.

Exemple

Développer $(3X^2 + X - 1)(X^3 + 2)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarques

- Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a aussi $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$: tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Les éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui sont dans $\mathbb{K}$ sont appelés *polynômes constants*. Par exemple $\sqrt{17} \in \mathbb{R}[X]$.
- L'élément $0 \in \mathbb{K}[X]$ est appelé *polynôme nul*.

Un peu de vocabulaire

Définition

L'élément X est appelée l'*indéterminée* de $\mathbb{K}[X]$.

Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$, on dit que

- le *degré* de P est l'entier $\deg(P) = d$.
- le *coefficient de degré* k de P est a_k si $k \leq d$ et 0 sinon. On le note parfois $c_k(P)$.
- le *coefficient dominant* de P est a_d.
- le *terme dominant* de P est $a_d X^d$.

Exemple

Identifier ces nombres pour $X^3 - 5X + 4$.

Exercice ✎

Soit $n \in \mathbb{N}$. Identifier les coefficients de degré $0, 1, 2, n-1, n$ des polynômes $(1+X)^n$ et $(1-X)^n$.

Coefficient d'une somme, d'un produit

On peut donner des formules :

Proposition

Quels que soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ *et* $k \in \mathbb{N}$*, on a*

$$c_k(P + Q) = c_k(P) + c_k(Q)$$

et

$$c_k(P \times Q) = \sum_{i+j=k} c_i(P)c_j(Q)$$

Propriétés du degré

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *non nuls. Si* P *est de degré* p *et si* Q *est de degré* q *alors* $P \times Q$ *est non nul et de degré* $p + q$*, c'est à dire*

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

Application

Il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \times X = 1$.

Exercice ✎

Avec la convention $\deg(0) = -\infty$, montrer que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \qquad \deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

et que l'inégalité peut être stricte.

Division euclidienne

Théorème

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $B \neq 0$. *Il existe un unique couple* $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ *solution de*

$$\begin{cases} A = B \times Q + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

On appelle Q *le quotient et* R *le reste.*

Exercice ✎

Prouver l'unicité.

Existence : l'algorithme de la division

1. Si $\deg A < \deg B$, on prend $Q = 0$ et $R = A$
2. Sinon, on trouve le monôme λX^k tel que :

   $$\deg(A - \lambda X^k B) < \deg A$$

   (Remarque : il suffit de considéter les termes dominants)
3. On divise $\tilde{A} = A - \lambda X^k B$ par B : on note $\tilde{Q}$ le quotient et $\tilde{R}$ le reste. On prend alors

   $$Q = \lambda X^k + \tilde{Q}, \qquad R = \tilde{R}$$

Exemple

Faire la division de $X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 + 1$.

Pour s'entraîner au calcul

Exercice ✎

Effectuez les divisions euclidiennes suivantes :

- $X^4 - 1$ divisé par $2X + 1$
- $X^{10} - 1$ divisé par $X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$
- $5X^4 + 8X^3 - 2X + 6$ divisé par $-3X^2 + 7$

Parfois, *rien ne sert de courir...*

Exercice ✎

Donnez le quotient et le reste de la division euclidienne de

- $3X^{2013} + X^{17} + 6X^3$ par X^{12}

Donner le reste de la divsion euclidienne de :

- $X^4 - 1$ divisé par $2X + 1$
- $(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)X)^n$ par $X^2 + 1$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$