Mathématiques Avancées

Semaine 1

18 septembre 2014

Partie I

Organisation du cours

Le cours s'organise sur douze semaines, du 18 septembre au 11 décembre, avec une relâche le 30 octobre.

Sur le site http://coursenligne.u-paris10.fr/

UFR SEGMI ▷ Niveau L ▷ Mathématiques Avancées

Clef d'inscription : 2014

Chaque semaine

- cours magistral le jeudi de 15h50 à 17h50, amphi. F
- le support de cours vidéoprojeté est mis en ligne.
- un test de cours est mis en ligne.
- des compléments peuvent être proposés.

Évaluation

- douze tests hebdomadaires
- un contrôle, après la semaine de vacances
- un examen en janvier
- (rattrapage éventuel en juin).

Tests hebdomadaires

- participent à la note de contrôle continu
- doivent être envoyés dans un délai de deux semaines
- entre dix et vingt questions
- une question de calcul
- pour le reste, applications immédiates du cours.

Partie II

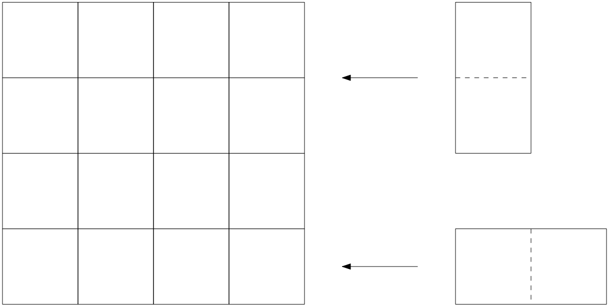
Des mathématiques, pourquoi ?

Des mathématiques, pourquoi ?

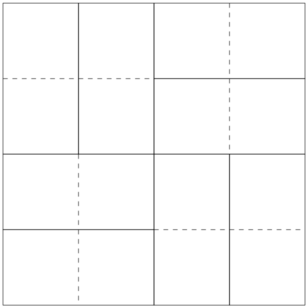
Réponse 1 : résoudre des problèmes.

Un problème de pavage

Peut-on paver un quadrillage carré à l'aide de dominos ?

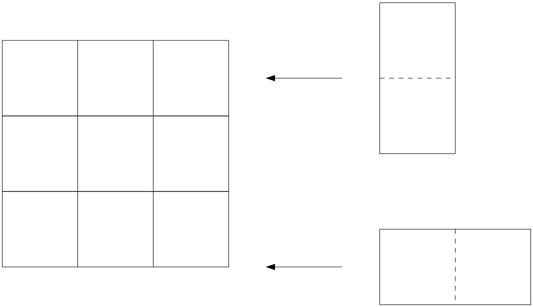


Facile !



Un problème de pavage

Peut-on *toujours* paver un quadrillage carré à l'aide de dominos ?

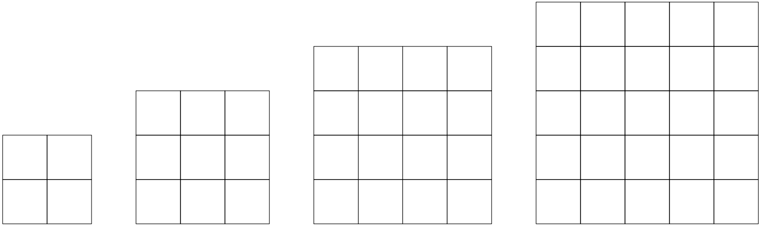


Des mathématiques, pourquoi ?

Réponse 2 : montrer que certaines choses sont impossibles.

Un problème général de pavage

Quels sont les quadrillages carrés que l'on peut paver avec des dominos ?



Des mathématiques, pourquoi ?

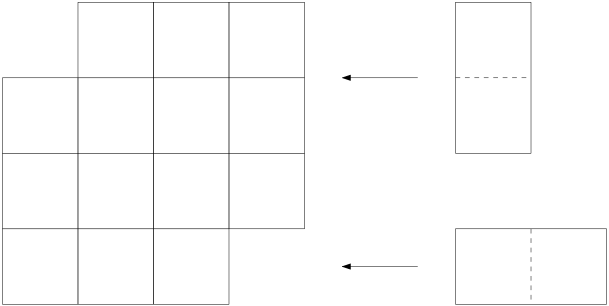
Réponse 3 : donner des réponses universelles.

Des mathématiques, pourquoi ?

Réponse 4 : établir des certitudes absolues.

Un dernier problème de pavage

On retire deux coins. Peut-on encore paver ce quadrillage ?



Partie III

Des mathématiques, comment ?

Des mathématiques, comment ?

On rédige les raisonnements *logiques* sous forme de *démonstrations*.

Structure d'une démonstration

Une démonstration rigoureuse d'un énoncé mathématique doit se composer :

1. d'hypothèses,
2. d'une suite de déductions,
3. d'une conclusion.

Les hypothèses

Définition (hypothèses)

Il s'agit de propriétés *admises* pour la démonstration.

Elles peuvent provenir :

- de la *définition* préalable des objets qu'on manipule,
- de résultats déjà connus du lecteur et de celui qui écrit,
- d'axiomes.

Les déductions

Définition (déductions, ou inférences)

Essentiellement, elles sont toutes de la même forme :

$$\textbf{Si } \mathrm{A}, \textbf{ alors } B. \textbf{ Or } A. \textbf{ Donc } B.$$

Les assertions « Si A, alors B » et « A » doivent résulter d'une déduction antérieure ou faire partie des hypothèses.

Afin d'éviter les redondances, il arrive qu'on remplace *si, alors, or* et *donc* par des mots équivalents.

Hypothèse implicites

Souvent, l'hypothèse « si A alors B » reste implicite.

Exemple (tiré du *Discours de la méthode*, 1637)

Quand Descartes écrit *« Je pense, donc je suis. »*, la déduction correspondante est en fait :

Si je pense, alors je suis. Or je pense, donc je suis.

La conclusion

Définition (conclusion)

C'est le résultat de la dernière déduction. Elle doit correspondre à l'énoncé qu'on se propose de démontrer.

L'implication

Définition (implication)

Une implication est une assertion de la forme « **Si** A, **alors** B ».

Exemple

S'il est français, alors il est européen.

- Il s'agit d'un lien de conséquence logique.
- En calcul propositionel, on note $A \implies B$.
- Les implications conduisent aux déductions. Elles sont donc omniprésentes (mais souvent implicites).

Implication et réciproque

Attention

Il faut faire attention à bien distinguer l'implication « Si A, alors B » de sa réciproque « Si B, alors A ».

Les confondre reviendrait à affirmer en toute bonne foi :

Il est européen, donc il est français !

Une démonstration de « **Si** A, **alors** B » consiste à prouver l'assertion « B » en introduisant localement l'hypothèse « A ».

Modèle de preuve de « Si A, alors B »

Supposons que A.

(une preuve de B qui peut utiliser A comme hypothèse)

On a donc « Si A, alors B ».

Exemple (à remettre dans l'ordre)

Soit n un entier.

- A On a donc « Si n est pair, alors n^2 est pair ».
- B On a $n^2 = 2k'$ avec k' entier donc n^2 est pair.
- C Supposons que n est un nombre pair.
- D Donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2k'$ avec $k' = 2k^2$.
- E Puisque n est pair, il existe k entier tel que $n = 2k$.

Exercice ✎

Quelles sont les hypothèses implicites de cette démonstration ?

Exemple (dans l'ordre)

Soit n un entier.

C **Supposons** que n est un nombre pair.

E Puisque n est pair, il existe k entier tel que $n = 2k$.

D Donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2k'$ avec $k' = 2k^2$.

B On a $n^2 = 2k'$ avec k' entier donc n^2 est pair.

A On a donc **« Si n est pair, alors n^2 est pair »**.

Exercice

Quelles sont les hypothèses implicites de cette démonstration ?

Hypothèses implicites ✎

- Si n est pair, alors il existe k entier tel que $n = 2k$.
- Si $n = 2k$, alors $n^2 = (2k)^2$.
- S'il existe k entier tel que $n^2 = 2k'$, alors n^2 est pair.

Notion d'équivalence

Deux assertions A et B sont équivalentes lorsque les deux implications suivantes sont vraies :

« Si A, alors B »
et
« Si B, alors A »

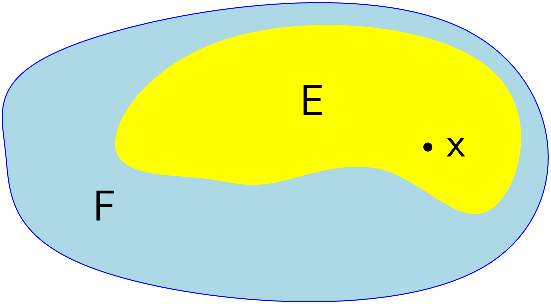
Partie IV

Rappels sur les ensembles

Un ensemble est une « collection » d'objets

1. La relation $x \in E$ se lit au choix :
   - x est un élément de E
   - x appartient à E
2. Deux ensembles sont égaux s'il ont les mêmes éléments.
3. La relation $E \subset F$ signifie que tous les éléments de E appartiennent aussi à F. On dit au choix :
   - E est un sous-ensemble de F
   - E est inclus dans F

Un ensemble est une « collection » d'objets



On a $x \in E$ et $E \subset F$. En particulier $x \in F$.

Quelques ensembles à connaître

- L'ensemble vide $\emptyset$ qui n'a aucun élément.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

Ces ensembles sont « emboîtés » : $\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Comment définir un ensemble ?

Au choix :

- En listant ses éléments.
  - $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ est l'ensemble des chiffres.
  - Le seul élément de $\{0\}$ est 0.
- Comme *sous-ensemble* d'éléments vérifiant une condition.
  - Quel est le sous-ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ de $\mathbb{Z}$?
  - Quels sont les éléments de $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$?

Quatre constructions importantes

Si E et F sont deux ensembles, on peut définir leur...

intersection $E \cap F$ formée des élements appartenant à E et F.

réunion $E \cup F$ formée des éléments appartenant à E ou F.

différence $E \setminus F$ formée des $x \in E$ tels que $x \notin F$.

produit $E \times F$ dont les éléments sont tous les couples (x, y) que l'on peut former avec $x \in E$ et $y \in F$.