Toutes les réponses devront être justifiées par une démonstration mathématique rédigée dans un français correct. Le barême est indicatif.

1. Questions de cours (environ 10 points)

Indiquer, en **démontrant** qu'il convient, un exemple de chacune des situations suivantes.

(1) Nombres complexes u, v différents de 1 tels que 2014 est un argument de $u \times v$.
(2) Polynômes non constants P, Q tels que le degré de $P \times Q$ est 2014.
(3) Assertions $A(n), B(n)$ telles que tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie $A(n)$ ou $B(n)$, sans que ni $A(n)$ ni $B(n)$ ne soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(4) Nombre complexe dont $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ est une racine carrée.
(5) Polynôme de degré 2014 dont le coefficient d'ordre 12 est 7.
(6) Suite récurrente linéaire d'ordre 2 réelle dont tous les termes sont dans $\mathbb{Q}$.
(7) Suite récurrente linéaire d'ordre 2 réelle qui tend vers $-\infty$.
(8) Ensembles A, B tels que A est inclus dans B mais B n'est pas inclus dans A.
(9) Ensembles A, B, C tels que A est inclus dans $B \cup C$ mais A n'est pas inclus dans B et A n'est pas inclus dans C.
(10) Polynôme P dont le quotient dans la division euclidienne par $X^3 + 7X - 2$ est $X^2 + 1$.

2. Exercices (environ 5 points)

2.1. **Intégrale trigonométrique.**

(1) Rappeler pourquoi $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(2) Montrer que $(\cos(x) + \sin(x))^4 = 2\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{3}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} (\cos(x) + \sin(x))^4 \, dx$.

2.2. **Division euclidienne.** Effectuer, en indiquant les détails du calcul, la division euclidienne du polynôme $2X^5 - 14X^4 + 5X^3 - 8X^2 + 4X + 1$ par le polynôme $X^2 - 7X + 2$.

3. Problème (environ 15 points)

Soient a, b des réels et soit (x_n) une suite de réels qui vérifie $x_{n+2} + a\,x_{n+1} + b\,x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $P = X^2 + aX + b$.

(1) (a) Montrer qu'il existe des nombres complexes u, v tels que $P = (X - u)(X - v)$.
    (b) Exprimer a et b en fonction de u et v.
(2) On suppose que $a^2 - 4b > 0$ avec $P(1) > 0$ et $P(-1) > 0$.
    (a) Prouver que u et v sont des réels.
    (b) Montrer que u et v appartiennent à $]-1, 1[$.
    (c) Déterminer la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(3) On suppose que $a^2 - 4b < 0$ avec $|b| < 1$.
    (a) Prouver que u n'est pas réel.
    (b) Montrer que v est le conjugué de u.
    (c) Déduire que $|u| < 1$ et $|v| < 1$.
    (d) Déterminer la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(4) On suppose que $a^2 - 4b = 0$.
    (a) Montrer que $u = v$ est racine double de P.
    (b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(n+2)u^{n+2} + a\,(n+1)u^{n+1} + b\,nu^n = 0$ (indication : on peut commencer par remarquer que u est racine double de $X^{n+2} + aX^{n+1} + bX^n$).
    (c) En déduire qu'il existe des réels λ, μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \lambda\,u^n + \mu\,nu^n$.
    (d) Donner une condition suffisante sur $P(1)$ et $P(-1)$ pour que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.