Les réponses doivent être rédigées de façon claire et concise, de préférence dans les cadres. Si nécessaire, vous pouvez utiliser la copie qui vous est fournie en indiquant précisément la question à laquelle vous répondez.

1. Exercices (8 points)

A. Soit A l'assertion « $\forall E, \forall F, \exists x \in E, (x \in F \implies (\forall y \in E, y \in F))$ ». Donner la négation de A.

non(A) s'écrit : $\exists E, \exists F, \forall x \in E, (x \in F$ et $(\exists y \in E, y \notin F))$.

En déduire une démonstration de A.

Raisonnons par l'absurde en supposant non(A). On a alors l'existence de deux ensembles E et F tels que tout $x \in E$ vérifie $x \in F$, c'est à dire $E \subset F$. Mais on aurait aussi l'existence d'un élément $y \in E$ tel que $y \notin F$, d'où $E \not\subset F$. Ceci constitue une contradiction.

B. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, et le module du nombre complexe $\dfrac{(2-\mathbf{i})(5+2\mathbf{i})}{3-4\mathbf{i}}$.

On a $\dfrac{(2-\mathbf{i})(5+2\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})}{(3-4\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})} = \dfrac{(30-16+20-6)+(-15+12+40+8)\mathbf{i}}{9+16} = \dfrac{40+45\mathbf{i}}{25} = \dfrac{8+9\mathbf{i}}{5}$.
La partie réelle est donc $\dfrac{8}{5}$, la partie imaginaire $\dfrac{9}{5}$ et le module $\sqrt{\dfrac{8^2}{5^2}+\dfrac{9^2}{5^2}} = \sqrt{\dfrac{29}{5}}$.

C. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par $c_0 = \sqrt{3}$, $c_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = 2(c_{n+1} + c_n)$. Exprimer c_n en fonction de n, puis en déduire la limite de c_n lorsque n tend vers l'infini.

L'équation du second degré associée $x^2 - 2x - 2 = 0$ peut se réécrire $(x-1)^2 = 3$ et admet donc deux solutions réelles distinctes $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$. D'après le cours on peut trouver deux réels A, B tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = A\,(1-\sqrt{3})^n + B\,(1+\sqrt{3})^n$. Sachant que $c_0 = \sqrt{3}$ et $c_1 = 0$, on trouve $A = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $B = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ après calcul.
Puisque $|1-\sqrt{3}| < 1$ et $1+\sqrt{3} > 0$ on sait que $(1-\sqrt{3})^n$ tend vers 0 et que $(1+\sqrt{3})^n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$. Comme $B > 0$, ceci entraîne que c_n tend vers $+\infty$ par opérations sur les limites.

2. Problème (12 points)

Soient a, b, c trois réels. Le but de ce problème est de démontrer le théorème vu en cours concernant l'étude du système d'équations de récurrence suivant, dont l'inconnue $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0.$$

2.1. Existence de solutions.

(1a) Montrer que la suite nulle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est solution de (E).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $az_{n+2} + bz_{n+1} + cz_n = a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 = 0$. Ceci exprime exactement le fait que (z_n) est solution de (E).

(1b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de (E) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\lambda\,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (E).

Par hypothèse on a $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $a\lambda u_{n+2} + b\lambda u_{n+1} + c\lambda u_n = 0 \times \lambda = 0$ également pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (λu_n) est-elle solution de (E).

(1c) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solution de (E), prouver que la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Par hypothèse, $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n$ et $av_{n+2}+bv_{n+1}+cv_n$ sont nuls pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc leur somme $a(u_{n+2}+v_{n+2})+b(u_{n+1}+v_{n+1})+c(u_n+v_n)$ est encore nulle pour tout $n\in\mathbb{N}$ puisque $0+0=0$. Ceci exprime le fait que (u_n+v_n) est solution de (E).

(1d) Soit $q\in\mathbb{R}^*$. On pose $u_n=q^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (E) si et seulement si q est solution de $aq^2+bq+c=0$.

On peut raisonner par analyse-synthèse. Pour l'analyse, supposons que (u_n) est solution de (E). Alors $aq^{n+2}+bq^{n+1}+cq^n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En prenant $n=0$, on a donc $aq^{2+0}+bq^{1+0}+cq^0=0$ c'est à dire $aq^2+bq+c=0$.

Pour la synthèse : supposons maintenant que $aq^2+bq+c=0$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on obtient $aq^{n+2}+bq^{n+1}+cq^n=q^n(aq^2+bq+c)=q^n\times 0=0$. Ainsi la suite (q^n) est-elle solution de (E).

(1e) Pour cette question, on suppose que l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x admet deux solutions réelles p et q. Déduire des questions précédentes que pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\lambda\,p^n+\mu\,q^n$ est solution de (E).

Pour tout $n\in\mathbb{N}$. Posons $u_n=p^n$ et $v_n=q^n$. D'après (1d) les suites (u_n) et (v_n) sont solutions de (E). D'après (1b) c'est encore le cas de $(\lambda\,u_n)$ et $(\mu\,v_n)$. Enfin d'après (1c) la somme $(\lambda\,u_n+\mu\,v_n)$ de ces deux dernières suites est également solution de (E), ce qu'il fallait prouver.

2.2. **Unicité des solutions.**

(2a) Montrer qu'il existe un triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ pour lequel il n'y a pas unicité des solutions de (E).

Posons $(a,b,c)=(0,0,0)$. Pour ce choix, toutes les suites de réels sont solution de (E). En particulier, il n'y a pas unicité des solutions.

(2b) Pour cette question, on suppose $a\neq 0$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux solutions de (E).

- On suppose que $u_0=v_0$ et $u_1=v_1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « $u_n=v_n$ et $u_{n+1}=v_{n+1}$ ». Prouver par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Initialisation : la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée car $u_0=v_0$ et $u_1=v_1$ par hypothèse.
Hérédité : pour un $n\in\mathbb{N}$ quelconque, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée, c'est à dire $u_n=v_n$ et $u_{n+1}=v_{n+1}$. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée. Comme on sait déjà que $u_{n+1}=v_{n+1}$ par hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que $u_{n+2}=v_{n+2}$. Comme (u_n) et (v_n) sont solutions de (E), on a $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=av_{n+2}+bv_{n+1}+cv_n=0$. En utilisant $\mathcal{P}(n)$ on en déduit que $au_{n+2}=av_{n+2}$ d'où, comme attendu, $u_{n+2}=v_{n+2}$ car on a supposé $a\neq 0$. On a donc prouvé $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)\implies\mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, on déduit des deux points précédents que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n)$ si et seulement si $(u_0=v_0$ et $u_1=v_1)$.

Supposons que $(\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n)$. Alors en prenant $n=0$ on a $u_0=v_0$ et en prenant $n=1$ on a $u_1=v_1$. Ainsi $(\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n)$ implique $(u_0=v_0$ et $u_1=v_1)$.
Réciproquement, supposons que $(u_0=v_0$ et $u_1=v_1)$. D'après la question (2b) on a alors $u_n=v_n$ et $u_{n+1}=v_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En particulier, $(u_0=v_0$ et $u_1=v_1)$ implique donc $(\forall n\in\mathbb{N}, u_n=v_n)$.
Les deux implications étant prouvées, il y a équivalence.

2.3. **Démonstration du théorème.** On suppose que l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x admet deux solutions *distinctes* p et q dans $\mathbb{R}$. Soit (u_n) une solution de (E).

(3a) Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda+\mu=u_0$ et $\lambda\,p+\mu\,q=u_1$.

> Procédons par analyse-synthèse. On commence par supposer que $\lambda+\mu=u_0$ et $\lambda p+\mu q=u_1$. Alors $qu_0-u_1=(q-p)\lambda$ et $pu_0-u_1=(p-q)\mu$. Comme $p-q\neq 0$, on a nécessairement $\lambda=\dfrac{qu_0-u_1}{q-p}$ et $\mu=\dfrac{pu_0-u_1}{p-q}$, ce qui achève l'analyse.
>
> Réciproquement, $\dfrac{qu_0-u_1}{q-p}+\dfrac{pu_0-u_1}{p-q}=\dfrac{(q-p)u_0}{q-p}=u_0$ et $\dfrac{(qu_0-u_1)p}{q-p}+\dfrac{(pu_0-u_1)q}{p-q}=u_1$ donc le couple (λ,μ) déterminé est bien solution du système. C'est la seule d'après l'analyse.

(3b) À l'aide des questions (1e), (2b) et (3a), montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda\,p^n+\mu\,q^n$.

> L'unicité est immédiate en utilisant (3a) car un tel couple (λ,μ) est en particulier solution du système $\lambda p^0+\mu q^0=u_0$ et $\lambda p^1+\mu q^1=u_1$ pour lequel on sait qu'il y a unicité.
>
> Soit maintenant (λ,μ) l'unique couple tel que $\lambda+\mu=u_0$ et $\lambda p+\mu q=u_1$. La suite de terme général $v_n=\lambda p^n+\mu q^n$ est solution de (E) d'après (1e) et elle vérifie $v_0=\lambda+\mu$ et $v_1=\lambda p+\mu q$ d'où ($u_0=v_0$ et $u_1=v_1$). D'après (2b) on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=v_n=\lambda p^n+\mu q^n$. Ceci prouve l'existence d'un couple (λ,μ) comme demandé.