Les réponses doivent être rédigées de façon claire et concise, de préférence dans les cadres. Si nécessaire, vous pouvez utiliser la copie qui vous est fournie en indiquant précisément la question à laquelle vous répondez.

1. Exercices (8 points)

A. Soit A l'assertion « $\forall E, \forall F, \exists x \in E, (x \in F \implies (\forall y \in E, y \in F))$ ». Donner la négation de A.

En déduire une démonstration de A.

B. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, et le module du nombre complexe $\dfrac{(2-\mathbf{i})(5+2\mathbf{i})}{3-4\mathbf{i}}$.

C. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par $c_0 = \sqrt{3}$, $c_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = 2(c_{n+1} + c_n)$. Exprimer c_n en fonction de n, puis en déduire la limite de c_n lorsque n tend vers l'infini.

2. Problème (12 points)

Soient a, b, c trois réels. Le but de ce problème est de démontrer le théorème vu en cours concernant l'étude du système d'équations de récurrence suivant, dont l'inconnue $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a\, u_{n+2} + b\, u_{n+1} + c\, u_n = 0.$$

2.1. **Existence de solutions.**

(1a) Montrer que la suite nulle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est solution de (E).

(1b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de (E) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\lambda\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (E).

(1c) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solution de (E), prouver que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

(1d) Soit $q \in \mathbb{R}^*$. On pose $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (E) si et seulement si q est solution de $aq^2 + bq + c = 0$.

(1e) Pour cette question, on suppose que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x admet deux solutions réelles p et q. Déduire des questions précédentes que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \lambda\, p^n + \mu\, q^n$ est solution de (E).

2.2. **Unicité des solutions.**

(2a) Montrer qu'il existe un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour lequel il n'y a pas unicité des solutions de (E).

(2b) Pour cette question, on suppose $a \neq 0$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux solutions de (E).

- On suppose que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$ ». Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n)$ si et seulement si $(u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1)$.

2.3. **Démonstration du théorème.** On suppose que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x admet deux solutions *distinctes* p et q dans $\mathbb{R}$. Soit (u_n) une solution de (E).

(3a) Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda + \mu = u_0$ et $\lambda\, p + \mu\, q = u_1$.

(3b) À l'aide des questions (1e), (2b) et (3a), montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\, p^n + \mu\, q^n$.