Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, notamment de l'orthographe. Le barème est indicatif.

Exercice (4 points). Pour chacune de ces propositions, démontrer si elle est vraie ou fausse :

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ (1-z)^2 = 2+3\mathbf{i}$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{C},\ (y^2 = x \implies y \notin \mathbb{R})$
3. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X],\ (P \times Q = 0 \implies P = 0 \text{ ou } Q = 0)$
4. $\exists P \in \mathbb{R}[X],\ ((\exists t \in \mathbb{R}, P(t) = 0) \implies P = 0)$

Exercice (2 points). Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$.

Exercice (5 points).

1. Rappeler et démontrer la formule d'Euler pour $\sin(x)$ avec x réel.
2. Montrer que pour tous réels α, β on a $e^{\mathbf{i}\alpha} - e^{\mathbf{i}\beta} = 2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.
3. En déduire que :
$$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)-\sin(\beta)}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos(\beta)-\cos(\alpha)}{2}.$$
4. *Application :* donner la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(x)\cos(2x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(x)\sin(2x)\,dx$.

Exercice (10 points). On considère la suite de polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et vérifiant la formule de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = P_n(3)$.
   (a) Montrer que (u_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2.
   (b) En déduire que $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A(3+2\sqrt{2})^n + B(3-2\sqrt{2})^n$ et déterminer les constantes A et B.
   (c) Étudier la convergence de u_n lorsque $n \to +\infty$.
3. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré n, que ses coefficients sont dans $\mathbb{Z}$, et donner son coefficient dominant. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction réelle f_n définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \sin(t)P_n(\cos(t))$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \sin((n+1)t)$. [On peut utiliser la question 3 de l'exercice 3]
   (b) En déduire les racines réelles de P_n.
   (c) En calculant $f_n''(t)$, montrer que $n(n+2)P_n(X) = 3XP_n'(X) + (X^2-1)P_n''(X)$.

Bon courage !