Questionnaire à choix multiples (environ 15 points)

Répondez directement sur l'énoncé sans justifier et glissez la feuille dans votre copie. Bonne réponse : +1, pas de réponse : 0, mauvaise réponse : −0,5.

QUESTION 1 – Si on écrit le nombre $\frac{\sqrt{5/2}-\sqrt{7/3}}{\sqrt{5/2-7/3}} \times \frac{\sqrt{5/2}+\sqrt{7/3}}{\sqrt{5/2+7/3}}$ sous la forme $\sqrt{a/b}$ où a, b sont les entiers naturels les plus petits possibles, alors $|a-b|$ vaut :

☐ 0 ☐ 812
☐ 35 ☐ 7
■ 28 ☐ aucune de ces propositions

Justification : On trouve $\frac{a}{b} = \frac{1}{29}$ et cette fraction est irréductible, d'où $a = 1$ et $b = 29$. Une erreur impardonnable *consiste à écrire $\sqrt{5/2-7/3} = \sqrt{5/2} - \sqrt{7/3}$ et simplifier ainsi l'expression en $1 \times 1 = 1$.*

QUESTION 2 – La partie réelle du complexe $\frac{(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^2}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}$ vaut :

☐ il n'a pas de partie réelle ☐ 0
☐ $-\sqrt{3}$ ■ -2
☐ $-\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{3}{4}$

Justification : En développant le carré, $(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^2 = 1 + 3\mathbf{i}^2 + 2\mathbf{i}\sqrt{3} = -2(1-\mathbf{i}\sqrt{3})$.

QUESTION 3 – Si la suite (u_n) vérifie $u_0 = 101$, $u_1 = 98$ et $u_{n+2} = \frac{99}{100}u_n - \frac{1}{100}u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$ vaut :

☐ $-\infty$ ☐ 0
☐ -1 ☐ $+\infty$
☐ $\frac{99}{100}$ ■ la limite n'existe pas

Justification : L'équation du second degré associée s'écrit $100\,x^2 = 99 - x$ et possède deux solutions distinctes $99/100$ et -1 dans $\mathbb{R}$. Les conditions initiales et le théorème du cours entraînent que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 100 \times (99/100)^n + (-1)^n$. Comme $0 < 99/100 < 1$ on voit que les termes pairs tendent vers 1 et que les termes impairs tendent vers -1.

QUESTION 4 – La partie imaginaire du complexe $\frac{(2+\mathbf{i})^2}{1-3\mathbf{i}} + \left(\frac{11}{10}\right)^{2013}$ vaut :

☐ $-\frac{9}{10}$ ☐ $\frac{11}{3}$
☐ 0 ☐ non, par l'absurde
☐ $-\frac{1}{3}$ ■ $\frac{13}{10}$

Justification : Le second terme d'intervient pas car c'est un réel. On écrit $(2+\mathbf{i})^2 = 3+4\mathbf{i}$ puis on multiplie par le conjugué de $1-3\mathbf{i}$, ce qui donne $\frac{(3+4\mathbf{i})(1+3\mathbf{i})}{(1-3\mathbf{i})(1+3\mathbf{i})} = \frac{-9+13\mathbf{i}}{10}$.

QUESTION 5 – Combien de solutions l'équation $(2x-3)(4y+5) = 0$ d'inconnues (x, y) dans $\mathbb{Q}^2$ possède-t-elle ?

☐ deux ☐ aucune
■ une infinité ☐ une seule

Justification : Ce produit est nul si et seulement si $x = 3/2$ ou *$y = -5/4$. Les solutions sont donc tous les couples $(3/2, y)$ avec $y \in \mathbb{Q}$ et tous les couples $(x, -5/4)$ avec $x \in \mathbb{Q}$.*

QUESTION 6 – La négation de « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0 \implies x = 0$ ou $y = 0$ » est :

☐ $\forall (x, y) \notin \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0 \implies x \neq 0$ ou $y \neq 0$
☐ $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0$ et $y \neq 0 \implies xy \neq 0$
☐ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0$ et $x \neq 0$ et $y \neq 0$
■ $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0$ et $x \neq 0$ et $y \neq 0$
☐ aucune de ces propositions

Justification : La négation de $A \implies B$ est « A et (non B) ».

QUESTION 7 – Combien de solutions l'équation $(10^{2013} - 10^{11}x)^2 = 10^{12}$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ possède-t-elle ?

☐ aucune ☐ une seule
☐ une infinité ☐ il faut faire une récurrence
☐ deux mille treize ■ deux

Justification : En posant $y = 10^{2013} - 10^{11}x$ l'équation s'écrit $y^2 = 10^{12}$ dont les solutions sont $y = \pm 10^6$. Pour chacune correspond une unique valeur $x = \frac{10^{2013} \mp 10^6}{10^{11}}$. On pouvait aussi utiliser la règle du produit nul comme dans le cours.

Question 8 – Le nombre $\sqrt{2}$ est un élément de (plusieurs cases à cocher) :

- ■ $\mathbb{C}$ (c'est un complexe)
- ☐ $\mathbb{Z}$ (c'est un entier relatif)
- ☐ $\mathbb{Q}$ (c'est un rationnel)
- ■ $\mathbb{R}$ (c'est un réel)

Justification : Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ il suffisait de se rappeler que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (théorème vu en cours).

Question 9 – La négation de « $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ |u_n - 1| < \varepsilon$ » est :

- ☐ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ■ $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ☐ $\forall \varepsilon \leq 0, \exists N \notin \mathbb{N}, \forall n < N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ☐ $\exists \varepsilon \leq 0, \forall N \notin \mathbb{N}, \exists n < N, |u_n - 1| < \varepsilon$
- ☐ $\exists \varepsilon \leq 0, \forall N \notin \mathbb{N}, \exists n < N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ☐ aucune de ces propositions

Justification : La négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ non\ P(x)$ ».

Exercice (environ 5 points)

1. Soit a un nombre réel positif ou nul. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $a < \varepsilon$. Démontrez que $a = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).
   Justification : Supposons que $a \neq 0$ et essayons d'obtenir une contradiction. Comme $a \geq 0$ ceci donne $a > 0$. L'inégalité $a < \varepsilon$ étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, elle devrait être vraie pour $\varepsilon = a$, mais l'inégalité stricte $a < a$ est absurde. On en déduit que l'hypothèse de départ $a \neq 0$ était fausse.

2. Énoncez avec des symboles la proposition ainsi démontrée : $\forall a \ldots$
   Justification : La proposition est « $\forall a \geq 0, ((\forall \varepsilon > 0,\ a < \varepsilon) \implies a = 0)$ ». Les parenthèses permettent de lever les ambiguités : la proposition précédente est très différente de « $\forall a \geq 0, \forall \varepsilon > 0, (a < \varepsilon \implies a = 0)$ » qui, elle, est fausse.

Problème (environ 10 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = n\,2^n$ et $b_n = 2^n$.

1. Démontrer que $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$ et $b_{n+2} = 4(b_{n+1} - b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Justification : Il suffit de faire le calcul. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$4(a_{n+1} - a_n) = 4((n+1)2^{n+1} - n2^n) = 2^{n+2}((n+1) \times 2 - n) = a_{n+2}$$
   et de même $4(b_{n+1} - b_n) = 4(2^{n+1} - 2^n) = 2^{n+2}(2-1) = b_{n+2}$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} k\,2^k = 4(n-1)2^{n-1} + 2$.
   Justification : Il y a avait plusieurs solutions, la première étant de prouver le résultat par récurrence sur $n \geq 1$. La seconde consistait à faire apparaître un téléscopage : pour tout $n \geq 1$ on a
   $$\sum_{k=0}^{n} k2^k = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = 0 + 2 + 4\sum_{k=2}^{n}(a_{k-1} - a_{k-2}) = 2 + 4(n-1)2^{n-1},$$
   car $a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 = a_{n-1} - a_0$.

3. Soit u_n une suite vérifiant $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver qu'il existe des réels A, B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A\,a_n + B\,b_n$ (on pourra déterminer A et B puis faire une récurrence).
   Justification : On raisonne par analyse-synthèse.

   Analyse. *S'il existe de tels A et B alors les égalités $u_0 = Aa_0 + Bb_0$ et $u_1 = Aa_1 + Bb_1$ donnent $u_0 = B$ et $u_1 = 2(A+B)$, d'où $B = u_0$ et $A = u_1/2 - u_0$.*

   Synthèse. *On pose $B = u_0$ et $A = u_1/2 - u_0$ et $v_n = Aa_n + Bb_n$. D'après la question 1, la suite (v_n) vérifie la même formule de récurrence que (u_n), à savoir $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 4(v_{n+1} - v_n)$. Comme $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, un exercice important vu en cours permet d'affirmer que les suites (u_n) et (v_n) sont égales. Si on ne se rappelle pas l'exercice, on peut démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ où $P(n)$ est la proposition « $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$ ».*