Questionnaire à choix multiples (environ 15 points)

Répondez directement sur l'énoncé sans justifier et glissez la feuille dans votre copie. Bonne réponse : +1, pas de réponse : 0, mauvaise réponse : −0,5.

Question 1 – Si on écrit le nombre $\frac{\sqrt{5/2}-\sqrt{7/3}}{\sqrt{5/2-7/3}} \times \frac{\sqrt{5/2}+\sqrt{7/3}}{\sqrt{5/2+7/3}}$ sous la forme $\sqrt{a/b}$ où a, b sont les entiers naturels les plus petits possibles, alors $|a-b|$ vaut :

- ☐ 0
- ☐ 35
- ☐ 28
- ☐ 812
- ☐ 7
- ☐ aucune de ces propositions

Question 2 – La partie réelle du complexe $\frac{(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^2}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}$ vaut :

- ☐ il n'a pas de partie réelle
- ☐ $-\sqrt{3}$
- ☐ $-\frac{1}{3}$
- ☐ 0
- ☐ -2
- ☐ $\frac{3}{4}$

Question 3 – Si la suite (u_n) vérifie $u_0 = 101$, $u_1 = 98$ et $u_{n+2} = \frac{99}{100}u_n - \frac{1}{100}u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$ vaut :

- ☐ $-\infty$
- ☐ -1
- ☐ $\frac{99}{100}$
- ☐ 0
- ☐ $+\infty$
- ☐ la limite n'existe pas

Question 4 – La partie imaginaire du complexe $\frac{(2+\mathbf{i})^2}{1-3\mathbf{i}} + \left(\frac{11}{10}\right)^{2013}$ vaut :

- ☐ $-\frac{9}{10}$
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{11}{3}$
- ☐ non, par l'absurde
- ☐ $\frac{13}{10}$

Question 5 – Combien de solutions l'équation $(2x-3)(4y+5) = 0$ d'inconnues (x, y) dans $\mathbb{Q}^2$ possède-t-elle ?

- ☐ deux
- ☐ une infinité
- ☐ aucune
- ☐ une seule

Question 6 – La négation de « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0 \implies x = 0$ ou $y = 0$ » est :

- ☐ $\forall (x, y) \notin \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0 \implies x \neq 0$ ou $y \neq 0$
- ☐ $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0$ et $y \neq 0 \implies xy \neq 0$
- ☐ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0$ et $x \neq 0$ et $y \neq 0$
- ☐ $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0$ et $x \neq 0$ et $y \neq 0$
- ☐ aucune de ces propositions

Question 7 – Combien de solutions l'équation $(10^{2013} - 10^{11}x)^2 = 10^{12}$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ possède-t-elle ?

- ☐ aucune
- ☐ une infinité
- ☐ deux mille treize
- ☐ une seule
- ☐ il faut faire une récurrence
- ☐ deux

Question 8 – Le nombre $\sqrt{2}$ est un élément de (plusieurs cases à cocher) :

- ☐ $\mathbb{C}$ (c'est un complexe)
- ☐ $\mathbb{Q}$ (c'est un rationnel)
- ☐ $\mathbb{Z}$ (c'est un entier relatif)
- ☐ $\mathbb{R}$ (c'est un réel)

Question 9 – La négation de « $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ |u_n - 1| < \varepsilon$ » est :

- ☐ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ☐ $\forall \varepsilon \leq 0, \exists N \notin \mathbb{N}, \forall n < N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ☐ $\exists \varepsilon \leq 0, \forall N \notin \mathbb{N}, \exists n < N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ☐ $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - 1| \geq \varepsilon$
- ☐ $\exists \varepsilon \leq 0, \forall N \notin \mathbb{N}, \exists n < N, |u_n - 1| < \varepsilon$
- ☐ aucune de ces propositions

Exercice (environ 5 points)

1. Soit a un nombre réel positif ou nul. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $a < \varepsilon$. Démontrez que $a = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).
2. Énoncez avec des symboles la proposition ainsi démontrée : $\forall a \ldots$

Problème (environ 10 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = n\,2^n$ et $b_n = 2^n$.

1. Démontrer que $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$ et $b_{n+2} = 4(b_{n+1} - b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} k\,2^k = 4(n-1)2^{n-1} + 2$.
3. Soit u_n une suite vérifiant $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver qu'il existe des réels A, B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A\,a_n + B\,b_n$ (on pourra déterminer A et B puis faire une récurrence).