Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, notamment de l'orthographe. Le barème est indicatif.

Le

Exercice (5 points).

1. Rappeler et démontrer la formule d'Euler pour $\cos(x)$ avec x réel.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{\mathbf{i}x} = \cos(x) + \mathbf{i}\sin(x)$ et $e^{-\mathbf{i}x} = \cos(x) - \mathbf{i}\sin(x)$ de sorte que $e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x} = \cos(x) + \cos(x) + \mathbf{i}(\sin(x) - \sin(x)) = 2\cos(x)$, ce qui prouve la formule d'Euler

$$\frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2} = \cos(x).$$

2. Montrer que pour tous réels α, β on a $e^{\mathbf{i}\alpha} + e^{\mathbf{i}\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

En utilisant la formule d'Euler pour cos, le membre de droite se réécrit

$$(e^{\mathbf{i}\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-\mathbf{i}\frac{\alpha-\beta}{2}})e^{\mathbf{i}\frac{\alpha+\beta}{2}} = e^{\mathbf{i}\frac{2\alpha+0}{2}} + e^{\mathbf{i}\frac{0+2\beta}{2}} = e^{\mathbf{i}\alpha} + e^{\mathbf{i}\beta}.$$

3. En déduire que pour tout réels α et β,

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos(\alpha)+\cos(\beta)}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)+\sin(\beta)}{2}.$$

Ce

imaginaire de l'égalité prouvée à la que

4. *Application :* donner la valeur des intégrales $\int_0^{\pi/6} \cos(x)\cos(2x)\,dx$ et $\int_0^{\pi/6} \cos(x)\sin(2x)\,dx$.

On utilise le

alors de trouver α et β tel $\frac{\alpha-\beta}{2} = x$ et $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2x$, ce qui conduit à po $\alpha = 3x$ et $\beta = x$. On obtient alors

$$\cos(x)\cos(2x) = \frac{\cos(3x)+\cos(x)}{2}, \qquad \cos(x)\sin(2x) = \frac{\sin(3x)+\sin(x)}{2}.$$

Le calcul de

$$\int_0^{\pi/6} \cos(x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(x)}{1}\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Le second calcul e

$$\int_0^{\pi/6} \cos(x)\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(3x)}{3} - \frac{\cos(x)}{1}\right]_0^{\pi/6} = \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Exercice (2 points). Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$.

On applique l'algorithme vu en cours.

$$\begin{array}{cccccc|c}
X^4 & -4X^3 & -9X^2 & +27X & +38 & & X^2 - X - 7 \\
 & -3X^3 & -2X^2 & +27X & +38 & & X^2 - 3X - 5 \\
 & & -5X^2 & +6X & +38 & & \\
 & & & X & +3 & &
\end{array}$$

Ainsi le quotient vaut $X^2 - 3X - 5$ et le re $X + 3$.

Exercice (4 points). Pour chacune de ces propositions, démontrer si elle est vraie ou fausse :

1. $\exists z \in \mathbb{C},\ (z+1)^2 = 1 - 2\mathbf{i}$

C'e δ e $1 - 2\mathbf{i}$ (il en existe toujours dans $\mathbb{C}$) alors $z = \delta - 1$ convient (remarquez que $z = -\delta - 1$ convient aussi).

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (xy > 0 \implies x > 0 \text{ et } y > 0)$

C'e $(x,y) = (-1,-1)$ vérifie $xy > 0$ et pourtant $x \leq 0$.

3. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C}, (z^2 = z \implies z = a \text{ ou } z = b)$

C'e $z^2 - z = 0$ sont 0 et 1, il suffit de prendre le couple $(a,b) = (0,1)$.

4. $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ ((\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 0) \implies P = 0)$

C'e
nul (d'aprè $n > 0$ po n racine

Exercice (10 points). On considère la suite de polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et vérifiant la formule de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.

On applique la formule de récurrence en prenant garde aux indice

$$P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1,$$

$$P_3 = 2XP_2 - P_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X,$$

$$P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

2. Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = P_n(2)$.

   (a) Montrer que (u_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2.

En évaluant la formule de récurrence en $X = 2$, on obtient

$$P_{n+2}(2) = 2 \times 2 \times P_{n+1}(2) - P_n(2)$$

ce qui se traduit par la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$ d'ordre 2 pour la suite (u_n), avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

   (b) En déduire que $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n$ et déterminer A et B.

L'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$, qui e
récurrence linéaire po $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. L'énoncé de la
que
alors A et B en utilisant le fait que $u_0 = 1 = A+B$ et $u_1 = 2 = A(2+\sqrt{3})+B(2-\sqrt{3})$,
ce qui entraîne $A = B = \frac{1}{2}$.

   (c) Étudier la convergence de u_n lorsque $n \to +\infty$.

On a $2+\sqrt{3} > 1$ et $|2-\sqrt{3}| < 1$ donc $\lim_{n\to\infty}(2+\sqrt{3})^n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n = 0$.
Puisque $A > 0$ on en déduit par « addition de limite $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

3. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré n, que ses coefficients sont dans $\mathbb{Z}$, et donner son coefficient dominant. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

En ob
sont satisfaite $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg(P_n) = n \text{ et } P_n \in \mathbb{Z}[X] \text{ et } \mathrm{dom}(P_n) = 2^n \text{ et } P_n(-X) = (-1)^n P_n(X). \qquad (\mathcal{H}_n)$$

On vérifie notamment que $(\mathcal{H}_n)$ e $n = 0$ et $n = 1$, ce qui permet d'initialiser la récurrence. Pour un m quelconque, suppo $(\mathcal{H}_n)$ e vérifiée pour tout $n \leq m+1$ et montrons que c'e $n = m+2$. Le

$P_{m+2}(X) = 2XP_{m+1}(X) - P_m(X)$ et la dernière s'obtient de façon analogue en sub $-X$ à la place de X :

$$\begin{aligned} P_{m+2}(-X) &= 2(-X)P_{m+1}(-X) - P_m(-X) = -2X(-1)^{m+1}P_{m+1}(X) - (-1)^m P_m(X) \\ &= (-1)^{m+2}(2XP_{m+1}(X) - P_m(X)) = (-1)^{m+2}P_{m+2}(X) \end{aligned}$$

car $(-1)^{m+2} = (-1)^2(-1)^m = (-1)^m$. La conjecture e $n \in \mathbb{N}$ en invoquant le principe de récurrence.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction réelle f_n définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $f_n(t) = P_n(\cos(t))$.

   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \cos(nt)$. [On peut utiliser la question 3 de l'exercice 1]

On effectue à nouveau une preuve par récurrence. Le ré pour $n = 0$ et $n = 1$, nous détaillons seulement la phase d'hérédité : suppo que $f_n(t) = \cos(nt)$ et $f_{n+1}(t) = \cos((n+1)t)$. En utilisant la formule de récurrence définissant le P_n on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_{n+2}(t) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos((n+2)t)$ ce qui, au vu de la formule démontrée à la que avec $\alpha = (n+2)t$ et $\beta = nt$, corre $f_{n+2}(t) = \cos((n+2)t)$.

   (b) En déduire les racines réelles de P_n.

D'aprè $P_n(\cos t) = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ équivaut à l'équation $\cos(nt) = 0$ dont le t tel $nt = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En prenant $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ on obtient n solutions dont le distinct P_n e n, se

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

   (c) En calculant $f_n''(t)$ de deux façons différentes, montrer que $n^2 P_n(X) = XP_n'(X) + (X^2-1)P_n''(X)$.

On utilisant le fait que $f_n(t) = P_n(\cos(t))$ et le

$$f_n'(t) = -\sin(t)P_n'(\cos(t)), \qquad f_n''(t) = -\cos(t)P_n'(\cos(t)) + \sin(t)^2 P_n''(\cos(t)).$$

Comme d'autre part on a montré que $f_n(t) = \cos(nt)$ on a aussi $f_n''(t) = -n^2\cos(nt) = -n^2 P_n(\cos(t))$. Avec la formule $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$ on obtient donc

$$n^2 P_n(c) = c \cdot P_n'(c) + (c^2 - 1)P_n''(c)$$

pour tout réel c de la forme $c = \cos(t)$. Puisqu'il y a une infinité de tel
c et que le c, on en
déduit le ré