Exercice 1. Factorisation

Soient $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 1$ et $Q = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$.

(a) Trouver deux racines « évidentes » de Q et donner leurs multiplicités.

Le polynôme Q admet 1 comme racine. Pour déterminer sa multiplicité, on peut remarquer que 1 est encore racine de $Q' = 7X^6 - 30X^5 + 40X^4 - 16X^3 - 12X^2 + 16X - 5$ mais pas de $Q'' = 42X^5 - 150X^4 + 160X^3 - 48X^2 - 24X + 16$. La multiplicité de 1 est donc 2. En faisant une division euclidienne on a aussi

$$Q = (X-1)^2(X^5 - 3X^4 + X^3 + X^2 - 3X + 1)$$

où le polynôme de degré 5 du terme de droite n'admet pas 1 pour racine. Une deuxième racine « évidente » est -1 dont on montre de façon similaire qu'elle est de multiplicité 1. On obtient la factorisation $Q = (X-1)^2(X+1)P$.

(b) Trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $P = X^2 R\left(X + \frac{1}{X}\right)$. En déduire une factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

On peut procéder par identification des coefficients, ou plus directement en écrivant

$$P = X^2\left(\left(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2\right) - 4\left(X + \frac{1}{X}\right) + 5 - 2\right) = X^2\, R\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

avec $R = X^2 - 4X + 3$. Ce polynôme de degré 2 s'écrit facilement sous la forme $R = (X-1)(X-3)$. En remontant à P, on obtient

$$P = X^2\left(X + \frac{1}{X} - 1\right)\left(X + \frac{1}{X} - 3\right) = (X^2 - X + 1)(X^2 - 3X + 1).$$

Le polynôme $X^2 - X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car c'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant vaut $-3 < 0$. En revanche, le polynôme $X^2 - 3X + 1$ admet pour racines réelles $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, ce qui donne la décomposition en irréductibles suivante dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)(X^2 - X + 1).$$

(c) Décomposer Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Les polynômes de degré 1 sont les seuls irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Les racines de $X^2 - X + 1$ étant $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On obtient finalement

$$Q = \left(X-1\right)^2\left(X+1\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exercice 2. Polynôme dérivé

(a) Démontrer que la dérivation des polynômes est *linéaire*, c'est à dire que pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$.

Ceci se vérifie directement sur la définition : si on note $P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} q_i X^i$, on obtient d'une part

$$(P + \lambda Q)' = \left(\sum_{i=0}^{n} (p_i + \lambda q_i) X^i \right)' = \sum_{i=1}^{n} i(p_i + \lambda q_i) X^{i-1}$$

et d'autre part

$$P' + \lambda Q' = \sum_{i=1}^{n} (i p_i X^{i-1} + \lambda i q_i X^{i-1}),$$

ces deux expressions étant égales.

(b) En commençant par traiter le cas des monômes, en déduire que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Commençons par traiter le cas des monômes : soient $P = \lambda X^p$ et $Q = \mu X^q$, de sorte que $PQ = \lambda\mu X^{p+q}$. On vérifie alors que $(PQ)' = \lambda\mu(p+q)X^{p+q-1}$ et $P'Q + PQ' = \lambda\mu p X^{p-1} X^q + \lambda\mu q X^p X^{q-1}$ sont égaux. Traitons maintenant le cas général : si $P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} q_i X^i$. En utilisant la linéarité (question a) à la ligne 1 et le cas des monômes à la ligne 2, on a

$$\begin{aligned} (PQ)' &= \left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} p_i q_j X^{i+j} \right)' = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \left(p_i q_j X^{i+j} \right)' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} (i p_i X^{i-1})(q_j X^j) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} (p_i X^i)(j q_j X^{j-1}) = P'Q + PQ'. \end{aligned}$$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la suite $(P^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

On sait que la dérivation des polynômes fait décroître de dégré de 1. On a donc $P^{(n)} = 0$ dès que $n > \deg P$. En particulier, $P^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n > \deg P$.

(d) Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme la somme *finie*

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n.$$

Le fait que la somme est bien définie et finie découle de la question précédente. De plus, on a

$$(X^m)^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m \\ m(m-1)\dots(m-n+1)X^{m-n} & \text{si } n \leqslant m \end{cases}, \qquad \text{d'où} \qquad (X^m)^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ n! & \text{si } m = n \end{cases}.$$

Ceci montre que l'égalité demandée est trivialement vérifiée pour les monômes. Le cas général s'en déduit alors simplement en utilisant la linéarité (question a).

Exercice 3. Une suite récurrente linéaire périodique

Soient $P = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ et $Q = X^{10} - 1$.

(a) Montrer que le polynôme Q a exactement 10 racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Comme Q est de degré 10, le théorème de d'Alembert-Gauss permet d'affirmer qu'il possède 10 racines comptées avec mutiplicités dans $\mathbb{C}$. Il reste donc à montrer qu'il n'a aucune racine multiple. On peut utiliser le polynôme dérivé : $Q' = 10X^9$ admet pour seule racine 0 qui n'est pas une racine de Q.

(b) Montrer que Q est divisible par P dans $\mathbb{R}[X]$.

Un calcul de division euclidienne donne $Q = (X^6 + X^5 - X - 1)P + 0$.

(c) Soient z_1, z_2, z_3, z_4 les racines de P dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont deux à deux distinctes et qu'elles vérifient $z_i^{10} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Comme P divise Q, les racines de P sont aussi des racines de $Q = X^{10} - 1$, d'où la seconde assertion. Par ailleurs, si les z_i n'étaient pas deux à deux distinctes alors P admettrait une racine multiple et donc Q aussi (car si $(X-a)^2$ divise P alors $(X-a)^2$ divise Q) ce qui est absurde d'après la première question.

(d) Sans calculs, montrer que tout suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+4} = u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est nécessairement périodique.

Le polynôme associé à cette équation de récurrence linéaire et $X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 = P$ qui admet 4 racines distinctes dans $\mathbb{C}$. Si (u_n) est solution de cette équation de récurrence, un théorème du cours permet d'affirmer l'existence de nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 z_2^n + \lambda_3 z_3^n + \lambda_4 z_4^n$. D'après la question précédente, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+10} = \lambda_1 z_1^n z_1^{10} + \lambda_2 z_2^n z_2^{10} + \lambda_3 z_3^n z_3^{10} + \lambda_4 z_4^n z_4^{10} = u_n,$$

ce qui montre que la suite (u_n) est périodique de période 10.

Exercice 4. Relations entre coefficients et racines

(a) Soient α, β, γ les racines (dans $\mathbb{C}$) de $X^3 - X - 1$. En développant $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$, donner la valeur de

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

En identifiant les coefficients des termes de même degré de $X^3 - X - 1$, on a les trois relations

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \qquad \alpha\beta\gamma = 1.$$

Réduisons maintenant l'expression considérée au même dénominateur $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1^3 - 1 - 1 = -1$. Le numérateur sera quant à lui

$$3 - (\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 3(\alpha\beta\gamma) = 3 - (-1) - 0 + 3 = 7$$

L'expression considérée vaut donc finalement -7.

(b) Trouver trois réels α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta\gamma = -1/2$ et $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma = 1/2$.

On va chercher à utiliser l'idée de la question précédente dans l'autre sens. On se ramène à trouver les racines du polynôme

$$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}.$$

La racine 2 est évidente. On déduit facilement les deux autres racines $\pm\frac{1}{2}$. Les trois réels $2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ répondent au problème (et la méthode employée montre que ce sont les seuls, à permutation près).

(c) Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$. On note $z_1, \ldots, z_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité. Montrer que

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n},$$

et plus généralement $\displaystyle\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} z_{i_1} \times \cdots \times z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Cette question est une synthèse et une généralisation des deux précédentes. Il suffit d'identifier les termes de même degré dans les deux membres de l'égalité

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = a_n (X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_n).$$

Note : ces relations importantes entre coefficients et racines permettent d'exprimer certaines expressions (typiquement polynomiales) symétriques en les racines d'un polynôme directement à partir des coefficients (sans avoir besoin de connaître les racines !). Par exemple, la somme des carrés des racines vaut

$$z_1^2 + \cdots + z_n^2 = (z_1 + \cdots + z_n)^2 - 2 \sum_{i<j} z_i z_j = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^2 - 2 \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$