Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées et rédigées. Le barème des exercices est indicatif.

Exercice A (6 points). Les questions suivantes sont mutuellement indépendantes.

1. Écrire $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ sous forme exponentielle. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   On a $1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$ *et* $\sqrt{3}+i=2\,e^{\frac{i\pi}{6}}$ *donc* $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$. *On a l'écriture algébrique en multipliant par le conjugué du dénominateur* $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$. *En identifiant avec* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, *on trouve* $\cos\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. Après avoir linéarisé $(\sin x)^4$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4}(\sin x)^4\,dx$. *Une première méthode consiste à utiliser les formules d'euler en développant* $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^4$. *On peut aussi utiliser directement les formules de duplication* $(\sin x)^2=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ *et* $(\cos(2x))^2=\dfrac{1+\cos(4x)}{2}$ *pour obtenir* $(\sin x)^4=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\cos(2x)}{2}+\dfrac{\cos(4x)}{8}$. *Ainsi,*

$$\int_0^{\pi/4}(\sin x)^4\,dx=\left[\frac{3x}{4}-\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{\sin(4x)}{32}\right]_0^{\pi/4}=\frac{3\pi}{16}-\frac{1}{4}.$$

3. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$\text{(E1)}\quad z^2-4z+7+4i=0,\qquad \text{(E2)}\quad z^3=2+2i,\qquad \text{(E3)}\quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^8=1.$$

   (E1) se met sous la forme $(z-2)^2=-3-4i$. *On cherche les racines carrées de* $\Delta'=-3-4i$ *sous la forme* $x+iy$ *où les réels* x *et* y *doivent vérifier* $(x+iy)^2=\Delta'$ *et* $|x+iy|^2=|\Delta'|=5$. *Ceci conduit au système* $\begin{cases}x^2-y^2=-3\\2xy=-4\\x^2+y^2=5\end{cases}$ *dont la résolution donne les racines carrées* $1-2i$ *et* $-1+2i$. *Les solutions de (E1) sont donc* $3-2i$ *et* $1+2i$.
   (E2) se réécrit $z^3=2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, *ce qui donne 3 solutions distinctes :* $z=\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{i2k\pi}{3}}$ *pour* $k\in\{0,1,2\}$.
   Pour (E3) on note que nécessairement $z\neq 1$. *Sous cette condition on pose* $\omega=\dfrac{z+1}{z-1}$ *on se ramène à* $\omega^8=1$ *dont les solutions sont les racines 8e de l'unité* $\omega=e^{\frac{i2k\pi}{8}}$ *avec* $0\leq k<8$. *On revient à* z *en écrivant que* $\omega=\dfrac{z+1}{z-1}\iff \omega z-\omega=z+1\iff z=\dfrac{\omega+1}{\omega-1}$ *pour* $z\neq1$ *et* $\omega\neq1$. *On obtient finalement les 7 solutions distinctes* $z=\dfrac{e^{\frac{i2k\pi}{8}}+1}{e^{\frac{i2k\pi}{8}}-1}=\dfrac{\cos(k\pi/8)}{i\sin(k\pi/8)}$ *pour* $0<k<8$.

Exercice B (4 points). On considère la fonction réelle f définie par $f(x)=\dfrac{x^5+x^4+1}{(2x-3)(x^2+x+1)}$.

1. Déterminer le domaine de définition $D_f\subset\mathbb{R}$ de cette fonction. *Le dénominateur s'annule si et seulement* $2x-3=0$ *ou* $x^2+x+1=0$. *Comme on a toujours* $x^2+x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, *le domaine de définition est* $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$.

2. Effectuer la division euclidienne de X^5+X^4+1 par X^2+X+1 dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire qu'on peut écrire $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{2x-3}$ pour tout $x\in D_f$.

$$\begin{array}{r|l} X^5+X^4+1 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} -X^3+1 & X^3-X+1 \\ X^2+X+1 & \\ 0 & \end{array}$$

Ce calcul de division euclidienne montre que $X^5+X^4+1=(X^2+X+1)(X^3-X+1)$. *On en déduit que pour tout* $x\neq\frac{3}{2}$ *on a*

$$f(x)=\frac{(x^2+x+1)(x^3-x+1)}{(2x-3)(x^2+x+1)}=\frac{x^3-x+1}{2x-3}.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (en utilisant une méthode vue en cours).
Par division euclidienne, on a $X^3-X+1=(2X-3)(\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{4}X+\frac{5}{8})+\frac{23}{8}$, *ce qui entraîne que la fonction se décompose sous la forme* $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3x}{4}+\dfrac{5}{8}+\dfrac{23}{16}\dfrac{1}{x-\frac{3}{2}}$ *qui s'intègre sans problème :*

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{8}+\frac{5x}{8}+\frac{23}{16}\ln|x-\frac{3}{2}|\right]_0^1=\frac{7}{6}-\frac{23\ln 3}{16}.$$

Exercice C (2 points). Soit $\alpha\in\,]0,\frac{1}{2}[$ fixé. On considère l'équation de récurrence $u_{n+2}=\alpha(u_{n+1}+u_n)$.

1. Donner la forme générale des solutions de cette équation.
Le polynôme caractéristique $X^2-\alpha X-\alpha$ *associé à cette récurrence a pour discriminant* $\alpha^2+4\alpha>0$. *Il a donc toujours deux racines réelles distinctes* $r_+=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$ *et* $r_-=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$. *On sait alors que toute solution de l'équation de récurrence s'écrit* $u_n=A\,r_+^n+B\,r_-^n$ *où* A *et* B *sont deux réels arbitraires.*
2. Montrer que chacune de ces solutions vérifie $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. *On utilise la forme trouvée dans la question précédente. Comme* $0<\alpha<\frac{1}{2}$, *on a* $|r_-|\leq|r_+|<\dfrac{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+4)}}{2}=1$. *On en déduit que les suites géométriques* $A\,r_+^n$ *et* $B\,r_-^n$ *convergent toutes les deux vers* 0, *ainsi que leur somme.*

Problème (8 points). Soit A un anneau (commutatif unitaire). Pour $a\in A$, on dit que a est *somme de deux carrés dans* A si on peut trouver $x,y\in A$ tels que $a=x^2+y^2$. Exemple : $37=6^2+1^2$ et $25=5^2+0^2$ donc 37 et 25 sont somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que quels que soient a,b,c,d des éléments de A, on a
$$(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$
Une fois développées, les deux expressions donnent $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$.
2. (a) Montrer que $5,13$ et 17 sont sommes de deux carrés dans $\mathbb{Z}$.
On a $5=2^2+1^2$, $13=3^2+2^2$ *et* $17=4^2+1^2$.
(b) Déduire des questions précédentes une décomposition en somme de deux carrés pour $221=13\times 17$ puis pour $1105=5\times 13\times 17$.
La question 1 avec $a=3,b=2,c=4,d=1$ *donne* $221=10^2+11^2$. *De même avec* $a=2,b=1,c=10,d=11$ *on trouve* $1105=9^2+32^2$.
(c) Tout élément de $\mathbb{Z}$ est-il somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$?
Non, par exemple -1 *ne l'est pas car le carré (et à plus forte raison une somme de carrés) d'un réel est un réel positif. Il y a aussi des contre-exemples positifs comme* 3 *ou* 7 *: les seules décompositions de* 3 *comme somme de deux entiers positifs sont* $0+3$ *et* $1+2$ *qui correspondent pas à deux carrés.*

3. Déterminer l'ensemble des éléments qui sont somme de deux carrés dans $A = \mathbb{C}$, puis dans $A = \mathbb{R}$.

   Dans $\mathbb{C}$, il suffit d'utiliser le fait que tout nombre complexe a au moins une racine carrée. Dans $\mathbb{R}$ une condition nécessaire pour que x soit somme de deux carrés est $x \geq 0$ comme on l'a déjà vu. Cette condition est suffisante car si $x \geq 0$ on a $x = \sqrt{x}^2 + 0^2$.

4. On se place dans $A = \mathbb{C}[X]$.

   (a) En développant l'expression $(aX+b)^2 + (iaX+c)^2$, montrer que tout polynôme de degré 1 est somme de deux carrés. *Le développement donne $2a(b+ic)X + b^2 + c^2$. Pour obtenir un polynôme de la forme λX il suffit de prendre $a = \frac{\lambda}{4}, b = 1, c = -i$. Pour obtenir $\lambda X + \mu$ avec $\mu \neq 0$ on peut prendre b tel que $b^2 = \mu$, $a = \frac{\lambda}{2a}$ et $c = 0$.*

   (b) Déduire que tout élément de $\mathbb{C}[X]$ est somme de deux carrés (on pourra utiliser la question 1 et raisonner par récurrence sur le degré). Traiter le cas de $X^2 + X + 1$.

   On prouve par récurrence sur d que pour tout $d \in \mathbb{N}$, « tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d est somme de deux carrés dans $\mathbb{C}[X]$ ». L'initialisation $d = 0$ correspond à la question 3. Pour l'hérédité, supposons établi que tout polynôme P de degré d est somme de deux carrés. Soit alors $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d+1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il admet au moins une racine $a \in \mathbb{C}$. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré d tel que $P = (X-a) \times Q$. Par hypothèse de récurrence, Q est somme de deux carrés. Par la question 4.a) le polynôme $X - a$ est aussi somme de deux carrés. La question 1 montre que ceci reste vrai pour leur produit. On a donc prouvé la propriété au rang $d+1$. On conclut en invoquant le principe de récurrence.

   Dans le cas particulier de X^2+X+1, on pourrait utiliser le raisonnement précédent en partant de la décomposition $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$ où $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Mais on peut faire plus simple en mettant ce trinôme sous forme canonique $X^2 + X + 1 = (X + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = (X + \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.