Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées et rédigées. Le barème des exercices est indicatif.

Exercice A (6 points). Les questions suivantes sont mutuellement indépendantes.

1. Écrire $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ sous forme exponentielle. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Après avoir linéarisé $(\sin x)^4$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sin x)^4\,dx$.
3. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{(E1)} \quad z^2 - 4z + 7 + 4i = 0, \qquad \text{(E2)} \quad z^3 = 2 + 2i, \qquad \text{(E3)} \quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^8 = 1.$$

Exercice B (4 points). On considère la fonction réelle f définie par $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + 1}{(2x-3)(x^2+x+1)}$.

1. Déterminer le domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$ de cette fonction.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X^4 + 1$ par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire qu'on peut écrire $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{2x - 3}$ pour tout $x \in D_f$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (en utilisant une méthode vue en cours).

Exercice C (2 points). Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ fixé. On considère l'équation de récurrence $u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$.

1. Donner la forme générale des solutions de cette équation.
2. Montrer que chacune de ces solutions vérifie $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Problème (8 points). Soit A un anneau (commutatif unitaire). Pour $a \in A$, on dit que a est *somme de deux carrés dans* A si on peut trouver $x, y \in A$ tels que $a = x^2 + y^2$. Exemple : $37 = 6^2 + 1^2$ et $25 = 5^2 + 0^2$ donc 37 et 25 sont somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que quels que soient a, b, c, d des éléments de A, on a

$$(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

2. (a) Montrer que $5, 13$ et 17 sont sommes de deux carrés dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes une décomposition en somme de deux carrés pour $221 = 13 \times 17$ puis pour $1105 = 5 \times 13 \times 17$.
   (c) Tout élément de $\mathbb{Z}$ est-il somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$?
3. Déterminer l'ensemble des éléments qui sont somme de deux carrés dans $A = \mathbb{C}$, puis dans $A = \mathbb{R}$.
4. On se place dans $A = \mathbb{C}[X]$.
   (a) En développant l'expression $(aX + b)^2 + (iaX + c)^2$, montrer que tout polynôme de degré 1 est somme de deux carrés.
   (b) Déduire que tout élément de $\mathbb{C}[X]$ est somme de deux carrés (on pourra utiliser la question 1 et raisonner par récurrence sur le degré). Traiter le cas de $X^2 + X + 1$.