
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, notamment de l'orthographe. Les exercices sont totalement indépendants.

Exercice 1.

(a) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de X^7 par $(X-1)^4$.

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le *reste* de la division euclidienne de $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par X^2+1.

Exercice 2. En linéarisant $(1+\sin(2x))^2$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\sin(2x))^2\,dx$.

Exercice 3. On considère le nombre complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

(a) Montrer que ω est racine de $X^4+X^3+X^2+X+1$ et en déduire deux réels a, b tels que $\omega + \dfrac{1}{\omega}$ soit racine du polynôme X^2+aX+b.

(b) En déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donner la valeur de $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

(c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 2(\cos(x))^2 - 1$. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 4. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $s_1 = 1$, $s_2 = \dfrac{4}{5}$, $s_3 = \dfrac{2}{5}$ et la relation : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+3} = \dfrac{3}{2}s_{n+2} - s_{n+1} + \dfrac{1}{4}s_n$.

(a) Montrer que le polynôme $X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + X - \dfrac{1}{4}$ admet une unique racine réelle λ_1, valant $\dfrac{1}{2}$; déterminer ses deux racines complexes λ_2 et λ_3 dont on précisera le module et un argument.

(b) On admet qu'il existe trois nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la relation $s_n = \dfrac{\alpha_1}{2^n} + \alpha_2{\lambda_2}^n + \alpha_3{\lambda_3}^n$. Calculer α_1, α_2 et α_3. Étudier la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$.

(a) Montrer que P_n a n racines de multiplicité 1 dans $\mathbb{C}$.

(b) Montrer que P_{2n} n'a pas de racine réelle (on pourra étudier le minimum de la fonction polynomiale $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P_{2n}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 6. Soit $A = \{a + i\,b\sqrt{2}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

(a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Est-il intègre ?

(b) Soit $x = a + i\,b\sqrt{2}$ un élément de A pour lequel $\exists y \in A,\ xy = 1$. Montrer que $a^2 + 2b^2 = 1$. L'anneau A est-il un corps ?