Vocabulaire et démonstration
Exercices

Quantificateurs

I Comment appelle-t-on les objets suivants ?

a. un nombre n qui vérifie : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$,

b. un nombre x qui vérifie : $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{a}{b}$,

c. une suite (u_n) qui vérifie : $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$,

d. une suite (u_n) qui vérifie : $\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q$.

II Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Formuler avec des quantificateurs les propriétés suivantes, ainsi que leurs négations :

a. f est la fonction nulle

b. f est une fonction constante,

c. f est une fonction linéaire,

d. f est une fonction affine,

e. f est un trinôme du second degré,

f. f est une fonction paire,

g. f est une fonction impaire,

h. f est une fonction périodique.

III Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Formuler avec des quantificateurs les propriétés suivantes, ainsi que leurs négations :

a. La fonction f admet un maximum global.

b. L'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x a exactement une solution dans $\mathbb{R}$.

c. L'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

d. Tout réel a un antécédent par f.

e. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur.

f. La fonction f admet un maximum local.

g. La fonction f admet un maximum local qui n'est pas un maximum global.

IV Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes, ainsi que leurs négations.

a. Tout entier est le carré d'un entier.

b. Tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.

c. Certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.

d. Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.

e. L'entier n est impair.

V Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax = a$. Montrer que $a = 0$.

VI Montrer qu'il existe un réel x tel que $x^2 < x$.

VII Démontrer que la proposition suivante est fausse.

$$\forall x \in \,]-\infty, 1[, \quad 2^{3^x} \times (\ln(1-x) + 1) \times (3x^3 + xe^x - 4) \geq 0$$

VIII

a. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$.

b. Existe-il $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$?

Connecteurs logiques

IX Expliciter les implications dans les phrases suivantes.

a. Pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie.

b. Pour que p soit vraie, il suffit que q soit vraie.

c. Il est nécessaire que p soit vraie pour que q soit vraie.

X Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On considère la formule suivante :

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ ((x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y))).$$

a. Quelle propriété de f est définie par cette formule ?

b. Par quelle formule se traduit « f est décroissante » ?

c. Par quelle formule se traduit « f est strictement croissante » ?

d. Quelle est la négation de la formule ?

XI Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle propriété de n se définit par la formule suivante ?

$$(n \neq 1) \text{ et } (\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N},\ ((n = ab) \implies (a = 1 \text{ ou } b = 1)))$$

Formuler sa négation. Montrer que 87 ne vérifie pas la propriété ci-dessus.

XII

a. A-t-on $(1 = 2) \implies (1 = 1)$?

b. A-t-on $(1 = 2) \implies (\ln(1) = 1)$?

c. Que peut-on dire des réciproques des propositions précédentes ?

XIII Est-il vrai que :

a. pour tout x réel, $((x^2 = 9) \iff (x = 3))$?

b. il existe x réel tel que $((x^2 = 9) \iff (x = 3))$?

Utilisation de l'absurde

XIV Soit x un nombre réel.

a. Démontrer par l'absurde que $((\forall \epsilon > 0,\ x \leq \epsilon) \implies (x \leq 0))$.

b. Redémontrer le même résultat par contraposition.

XV

a. Montrer que pour tout n entier, n est pair si et seulement si n^2 est pair.
Rappel : un entier m est impair si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2k + 1$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$.

Complément de cours : lettres grecques

Il faudra connaître par cœur le fragment suivant de l'aphabet grec. Nous serons amenés à l'utiliser couramment.

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ ou ε	
zeta	ζ	
eta	η	
theta	θ	Θ
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	
pi	π	Π
rho	ρ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
phi	ϕ ou φ	Φ
khi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω