Indépendance et conditionnement
Exercices

Lycée Carnot, E1A

1. Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne. On considère les évènements suivants :

A : « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »

B : « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »

C : « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »

D : « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

(a) Parmi ces évènements, dire lesquels sont indépendants.

(b) Ces quatre évènements sont-ils mutuellement indépendants ?

2. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré, et on s'intéresse aux évènements suivants.

A : « le premier résultat est pair »,

B : « le second résultat est impair »,

C : « la somme des résultats est paire ».

(a) Démontrer que A, B et C sont deux à deux indépendants.

(b) Démontrer que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

3. On effectue n lancers successifs d'une pièce à pile-ou-face et on considère les évènements :

A_n : « les deux côtés de la pièce apparaissent à l'issue des n tirages »,

B_n : « on obtient au plus un Pile ».

(a) Calculer les probabilités de A_n et de B_n en fonction de n.

(b) Pour quelles valeurs de n ces deux évènement sont-il indépendants ?

4. Selon les estimations de l'ONU, il y a environ 102 garçons pour 100 filles sur l'ensemble de la population mondiale. De plus, la fréquence des daltoniens est de 8% chez les garçons et 0,5% chez les filles. On sélectionne une personne au hasard.

(a) On note F l'évènement « la personne choisie est une fille » et D l'évènement « la personne choisie est daltonienne ». Les évènements F et D sont-ils indépendants ?

(b) Quelle est la probabilité que cette personne soit une fille sachant qu'elle est atteinte de daltonisme ?

5. (Paradoxe des deux enfants, extrait de *Scientific American* (1959)).
Mr Jones has two children. The older child is a girl. What is the probabilty that both children are girls ? Mr Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys ?

6. Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve de la nourriture, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Quelle est la probabilité qu'il réussisse pour la première fois à la tentative numéro k ? On répondra à cette question sous chacune des trois hypothèses suivantes.

(a) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,

(b) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,

(c) le rat se souvient des deux expériences précédentes.

7. Une maladie rare touche une personne sur 10000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif dans 99% des cas si la personne est malade, et positif dans $0,1\%$ des cas si la personne n'est pas malade. Qu'elle est la probabilité pour qu'une personne prise au hasard soit effectivement malade sachant que son test est positif ?

8. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer est $\frac{1}{2}$.

(a) On lance un dé au hasard parmi les 100 dés et on obtient 6. Déterminer la probabilité que le dé soit pipé.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un dé au hasard parmi les 100. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

(c) Calculer la limite de p_n lorsque $n \to \infty$ et interpréter ce résultat.

9. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

(a) Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

(b) Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

(c) Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

10. Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, le lendemain il reste motivé et ne fume qu'avec une probabilité de $\frac{1}{4}$. Par contre s'il fume un jour, le lendemain il fume avec une probabilité notée $\alpha \in [0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le jour numéro n.

(a) Exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et α.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \left(\alpha - \dfrac{1}{4}\right)^n p_0 + \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha - \dfrac{1}{4}\right)^k$

(c) Calculer la limite de p_n lorsque $n \to \infty$.

(d) Cette limite peut-elle être nulle ? Si non, donnez-en une minoration. Cette stratégie vous parait-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

11. Deux joueurs A et B s'affrontent au Go sans discontinuer. Le joueur B gagne la première partie. La probabilité que A remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,6$. La probabilité que B remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $0,5$.

On note p_n la probabilité que B remporte la n^{e} partie.

Montrer que (p_n) est arithmético-géométrique et donner une formule explicite.