Limites de fonctions
Exercices

Lycée Carnot, E1A

Calcul de limites

1. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$ et $-\infty$.

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ (b) $g(x) = x^5 - e^{2x}$ (c) $h(x) = (3 + x^2)\ e^x$

2. Déterminer les limites suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{-5x^2 + 37x - 4}{8x^2 - 2}$ en $+\infty$.

(b) $g(x) = \dfrac{x^7 - 1}{52x^6 + 3x^2 - 2x}$ en $-\infty$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^7\, e^x - x\, e^{2x}}{x^3(\ln x) + x(\ln x)^5}$ en $+\infty$.

(d) $g(x) = \dfrac{xe^x + x^2 + e^{x^3}}{x^7 + 5}$ en $-\infty$.

(e) $h(x) = \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ en $+\infty$.

(f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$ en $+\infty$.

(g) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

(h) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)} - \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$ en $+\infty$.

(i) $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1 - x}}\ e^{\frac{1}{x(x-1)}}$ en 0^+.

3. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{9x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln x)^4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to1} \ln(x + 3) - \ln(x - 1)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x + 6} - \sqrt{x - 2}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x^2 - 9}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x + 3) - \ln(x - 1)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2 + 1) - 2\ln x$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{\sqrt{x} + 1}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4\, e^{-\sqrt{x}}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^3}}{x}$

Composition des limites

4. Déterminer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ \ln(x)$ *(on pourra poser* $y = \dfrac{1}{x}$*)*

(b) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} (x - 1)^2\ \ln(x - 1)$ *(on pourra poser* $y = x - 1$*)*

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \quad x^2\, e^{\frac{1}{x}}$ *(on pourra poser* $y = \dfrac{1}{x}$*)*

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \quad \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ *(on pourra poser* $y = \sqrt{x}$*)*

Limite à droite, limite à gauche

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en a ?

(b) La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue en a ?

6. Étudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes.

(a) $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

(b) $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

(c) $x_0 = 0$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - e^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(d) $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(e) $x_0 = 1$ et $j(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Prolongement par continuité

7. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis rechercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de cet ensemble de définition :

(a) $f_1(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{(x-2)^2}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}}$

(d) $f_4(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$

(f) $f_6(x) = e^{-1/x^2}$

Utilisation d'inégalités

8. Déterminer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\lfloor \frac{3}{x} \rfloor}$

9. Déterminer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^3}}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{xe^x + x^2 + e^{x^3}}{x^3+5}$

10. On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Le but est de trouver la limite de f en 1^-.

(a) Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

(b) Démontrer que : $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leqslant u$.

(c) En déduire que : $\forall u > -1,\ u \times e^{\frac{1}{\ln(1+u)}} \geqslant u \times e^{\frac{1}{u}}$.

(d) Déterminer $\lim\limits_{u \to +\infty} u \times e^{\frac{1}{u}}$ et conclure.

11. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}}\, e^{\frac{1}{x(x-1)}}$
Le but est de trouver la limite de f en 1^+.

(a) Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

(b) Démontrer que : $\forall u > 0,\ 0 < \dfrac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} \times e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leqslant (1-u)^3 \times \dfrac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$ et conclure.

Taux d'accroissement du logarithme

12. On calcule ici une limite très classique et très utile. À connaître !

(a) Montrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

♡ (b) En déduire la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ lorsque $x \to 0$.

13. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que f est non nulle au voisinage de x_0.
On suppose enfin que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

(a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(1+e^{-x})$.

14. Déterminer les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x^3)^{1/x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1-5x)}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

(e) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\ln x}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$

(j) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ \ln\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)$

15. Déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x \to 0}(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

16. On considère la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^{\ln(e-x)}$ et on se propose de déterminer sa limite pour $x \to e^-$ (e par valeurs strictement inférieures).

(a) On pose $X = \dfrac{x}{e}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de X.

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{X\to 1^-} \frac{\ln(1+\ln X)}{X-1} = 1$.

(c) Montrer que $\displaystyle\lim_{X\to 1^-} \frac{1+\ln(1-X)}{\ln(1-X)} = 1$.

(d) En déduire que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \exp(-(1-X)\ln(1-X)\ H(X))$$

où $H(X)$ est telle que $\displaystyle\lim_{X\to 1^-} H(X) = 1$.

(e) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to e^-} f(x)$.
(on pourra poser $T = 1 - X$)

Démonstrations du cours

17. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bornée} \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to x_0} (f \times g)(x) = 0$$

18. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

(a) Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty$$

(b) Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell_1 \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to +\infty} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

(c) Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to x_0} (f \times g)(x) = \ell_1 \ell_2$$

On pourra remarquer que :
$f(x)g(x) - \ell_1\ell_2 = f(x)(g(x) - \ell_2) + \ell_2(f(x) - \ell_1)$.