Devoir surveillé n° 7

Lycée Carnot, E1A

samedi 6 avril 2019 (durée : 4h)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1

Dans cet exercice, on étudie une notion d'exponentielle pour des matrices carrées d'ordre 3, puis d'ordre 2.

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3

Soient A, P et T les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

2. **a)** Prouver que $T = PAP^{-1}$.

b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

3. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad A^n = 0$$

où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.

4. Pour tout réel x, on définit la matrice $E(x)$ par :

$$E(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2$$

où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad E(x)E(y) = E(x+y).$$

b) Pour tout x réel, calculer $E(x)E(-x)$. En déduire que la matrice $E(x)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2, x.

c) Pour tout x réel et tout entier naturel n, déterminer $[E(x)]^n$ en fonction de I, A, A^2, x et n.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit B la matrice définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel x, on définit la matrice $E_n(x)$ par :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}B^k, \quad \text{que l'on note} \quad E_n(x) = \begin{pmatrix} a_n(x) & c_n(x) \\ b_n(x) & d_n(x) \end{pmatrix}.$$

5. Pour tout entier naturel n, montrer que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^k-(2x)^k}{k!}.$$

exprimer de même $b_n(x)$, $c_n(x)$, $d_n(x)$ sous la forme d'une somme.

7. Déterminer les limites de $a_n(x)$, $b_n(x)$, $c_n(x)$, $d_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8. Pour tout x réel, on pose :

$$E(x) = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{2x} & e^x - e^{2x} \\ 2e^{2x} - 2e^x & 2e^{2x} - e^x \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer deux matrices M et N telles que pour tout x réel on ait :

$$E(x) = e^x M + e^{2x} N.$$

b) Calculer M^2, N^2, MN, NM.

c) En déduire que pour tout x réel, $E(x)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces. Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés. On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé ;
- E_1 l'événement $[D_1 < D_2]$, E_2 l'événement $[D_1 = D_2]$ et E_3 l'événement $[D_1 > D_2]$.

Lors d'une partie,

— si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,

— si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,

— si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur effectue alors une suite de parties indépendantes, en ajoutant les points obtenus successivement. Le score initial est nul.

I. Étude de parties successives

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- X_n la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la n-ième partie ;
- Y_n le score cumulé des n premières parties.

9. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_n et montrer que $P([X_n \geqslant 1]) = \dfrac{7}{12}$.

11. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_1 ? Déterminer sa fonction de répartition puis la tracer.

12. **a)** Préciser l'ensemble $Y_2(\Omega)$ des valeurs possibles pour la variable aléatoire Y_2.

b) Pour tous $i \in [\![0;2]\!]$ et $j \in [\![0;2]\!]$, calculer $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau dont les lignes sont indexées par i et les colonnes par j.

c) Montrer que :

$$P([Y_2 = 3]) = \sum_{i=0}^{2} P([X_1 = i] \cap [X_2 = 3 - i]),$$

puis en déduire la valeur de cette probabilité.

d) Déterminer plus généralement la loi de Y_2.

II. Étude du temps d'attente

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements A_n : « le score cumulé est supérieur ou égal à 1 pour la *première fois* à l'issue de la n-ième partie » ainsi que B_n : « le score cumulé est supérieur ou égal à 2 pour la *première fois* à l'issue de la n-ième partie ».

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0, 0, 1, 0, 1, 2, ... alors A_3 et B_5 sont réalisés, mais pas A_4 ni B_6.
Exemple 2 : 0, 0, 0, 2, 1, 2, ... alors A_4 et B_4, mais pas A_5 ni B_5.

13. **a)** Exprimer l'événement C : « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 1 » en fonction des événements $[X_n = 0]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire la probabilité de l'événement C, puis celle de l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement A_n.

15. **a)** Calculer les probabilités $P(B_1)$ et $P(B_2)$.

b) Prouver que, pour $n \geqslant 3$, on a :

$$\mathrm{P}(B_n) = \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} + (n-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \times \frac{7}{12}$$

c) Ce résultat est-il valable pour $n = 1$ et $n = 2$?

d) Établir que : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = 1$.

e) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?

Problème

Le problème aborde d'une part, l'analyse mathématique de l'évolution du prix de vente d'un bien sous différents modes d'anticipation d'agents économiques et d'autre part, la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction de profit d'une entreprise.

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction d'offre globale (des entreprises) et p le prix de vente du bien.
On suppose habituellement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est décroissante et que la fonction $O : p \mapsto O(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est croissante.

Si l'équation $O(p) = D(P)$ admet; une solution p^*, on dit que p^* est *un prix d'équilibre du marché*.

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d'offre $(O(p)) > D(p))$ ou des excès de demande $(D(p) > O(p))$ au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la valeur du prix à l'instant n.
On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la quantité offerte O_n à l'instant n à un *prix anticipé* à l'instant $(n-1)$, noté $\widehat{p_n}$, selon la relation $O_n = O(\widehat{p_n})$, où $\widehat{p_0}$ peut être interprété comme un prix d'étude de marché.
On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels .strictement positifs a, b, c et d, avec $a > d$, et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $D(p) = a - bp$ et $O(p) = cp + d$.
Par suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(p_n) = a - bp_n$ et $O(\widehat{p_n}) = c\widehat{p_n} + d$.

16. Dans cette question uniquement, les réels a, b, c et d ont les valeurs suivantes : $a = 40$, $b = 8$, $c = 2$ et $d = 20$.

On suppose que p_0 et. p_1 sont donnés et que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\widehat{p_n} = 2p_{n-1} - p_{n-2}$

a) Établir l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre p^*. Calculer p^*.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $p_n = -\dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{5}{2}$.

c) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function p = calculeTerme(p0, p1, n)` qui renvoie, pour p_0, p_1 et n fixés, le terme p_n.

d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

e) Calculer les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de n, r_1, r_2, p_0, p_1 et p^*.

g) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ? Interpréter.

17. Soit β un paramètre réel vérifiant $0 < \beta \leqslant 1$. 0n suppose que le prix p_0 est donné et que les anticipations de prix sont adaptatives, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\widehat{p_n} = \widehat{p}_{n-1} + \beta\left(p_{n-1} - \widehat{p}_{n-1}\right).$$

a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prix courant p_n en fonction du prix anticipé $\widehat{p_n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le prix p_n vérifie l'équation de récurrence suivante :

$$p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}.$$

c) Quel est le prix d'équilibre p^* ? Exprimer p_n en fonction de n, p_0, p^*, b, c et β.

d) En supposant que $p_0 \neq p^*$, montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $\dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta} - 1$. Quelle est alors sa limite ?

e) Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $c < b$.

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

18. Soit p un paramètre réel positif ou nul et h_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$h_p(x) = px - \frac{x^3}{3}.$$

a) Dresser 1e tableau de variation de h_p sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les limites aux bornes de l'intervalle de définition, les racines de l'équation $h_p(x) = 0$ et la valeur maximale de h_p sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tracer la courbe représentative de h_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

On considère une entreprise présente sur le marché d'un bien qui adapte son volume de production $x \in \mathbb{R}_+$ à un niveau de prix $p \in \mathbb{R}_+$ donné (par l'équilibre du marché) ou administré (par l'État).

On modélise le *coût total* de l'entreprise par une fonction F définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sa dérivée F', telle que $F(0) = F'(0) = 0$ et $F(x)$ équivalent à sx^r avec $s > 0$ et $r > 1$, lorsque x tend vers $+\infty$. On note F'' la dérivée seconde de F et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F''(x) > 0$.

Soit Π_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $\Pi_p(x) = px - F(x)$

19. **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F'(x) = +\infty$ et que F' admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque, que l'on note S, dont on précisera l'ensemble de définition (*la fonction S est la fonction d'offre de l'entreprise*).

b) Montrer que Π_p est concave sur $\mathbb{R}_+$ et admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum atteint en un seul point.

20. Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $M(p) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \Pi_p(x)$ (*la fonction M est la fonction de profit de l'entreprise*).

a) Pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, exprimer $M(p)$ à l'aide de p, F et S.

b) Montrer que la fonction M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivéee M'.

c) Montrer que la fonction M est convexe et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

21. On suppose que le prix p est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\left\{p^{(1)}, p^{(2)}, ..., p^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est un entier fixé supérieur ou égal à 2. On admettra le théorème suivant.

Si X est une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ est de cardinal k, alors pour toute fonction $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, l'espérance de $\varphi(X)$ est donnée par :

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i) P([X = x_i]).$$

a) Montrer que pour tout $i \in [[1, k]]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a : $M\left(p^{(i)}\right) - M(y) \geqslant M'(y)\left(p^{(i)} - y\right)$

b) En déduire pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $E(M(p)) \geqslant M(y) + M'(y)(E(p) - y)$

c) Établir l'inégalité $E(M(p)) \geqslant M(E(p))$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?