Devoir surveillé n° 7

Lycée Carnot, E1A

Correction

Exercice 1 (42 points)

Dans cet exercice, on étudie une notion d'exponentielle pour des matrices carrées d'ordre 3, puis d'ordre 2.

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3

Soient A, P et T les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

Rapport. La méthode de Gauss-Jordan (voir le cours en cas de doute) permet à la fois de démontrer l'inversibilité de P [**1 p.**] et de calculer son inverse [**2 p.**]. On trouve :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

Si vous avez passé du temps sur un tel calcul, assurez-vous que votre résultat est correct avant de continuer !

2. a) Prouver que $T = PAP^{-1}$.

Rapport. Il s'agit d'effectuer correctement deux produits matriciels consécutifs [**2 p.**]. Remarquons que l'expression correcte de P^{-1} n'était pas nécessaire puisque la relation $A = PAP^{-1}$ est équivalente à $AP = PA$ (calculs un peu plus simples).

b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

Rapport. On calcule successivement $T^2 = T \times T$ **[1 p.]** puis $T^3 = T \times T^2$ **[1 p.]** :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que, pour tout $n \geqslant 3$, T^n est nulle **[1 p.]** par règle de calcul pour les puissances entières **[1 p.]**.

3. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad A^n = 0$$

où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.

Rapport. La relation $T = PAP^{-1}$ permet d'exprimer A en fonction de P, T et P^{-1} **[1 p.]**, puis d'en déduire que $A^3 = P^{-1}T^3P$ est nulle **[1 p.]**. On conclut alors avec le même argument qu'à la question précédente **[1 p.]**.
Il est aussi possible de commencer par établir par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}T^nP$.

4. Pour tout réel x, on définit la matrice $E(x)$ par :

$$E(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2$$

où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

a) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad E(x)E(y) = E(x+y).$$

Rapport. Il faut être prudent dans ce genre de calcul car le produit matriciel n'est pas commutatif en général ! Cependant, le produit par un réel λ commute avec le produit matriciel **[1 p.]**, c'est-à-dire que $A(\lambda B) = \lambda(AB)$. Puisque, d'après la question précédente A^3 et A^4 sont nulles **[1 p.]**, ceci permet de développer le produit de $E(x)$ et $E(y)$ sous la forme :

$$I + (x+y)A + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)A^2 \qquad \textbf{[1 p.]}$$

qui correspond bien à la matrice $E(x+y)$ par identité remarquable **[1 p.]**.

b) Pour tout x réel, calculer $E(x)E(-x)$. En déduire que la matrice $E(x)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2, x.

Rapport. Ne surtout pas refaire le calcul ! Il suffit d'appliquer la question précédente avec $y = -x$ et de vérifier que $E(0)$ est la matrice identité **[1 p.]**. Par théorème du cours, ceci montre directement que $E(x)$ est inversible **[1 p.]** et que son inverse est

$$\boxed{E(-x) = I - xA + \frac{x^2}{2}A^2} \qquad \textbf{[1 p.]}$$

c) Pour tout x réel et tout entier naturel n, déterminer $[E(x)]^n$ en fonction de I, A, A^2, x et n.

Rapport. En remarquant que $E(x)^2 = E(x+x) = E(2x)$ ou en s'inspirant des propriétés de la fonction exponentielle, on conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(x)^n = E(nx) \qquad \textbf{[1 p.]}$$

qu'on établit par récurrence **[1 p.]** en utilisant $E(x)^{n+1} = E(x)^n \times E(x)$ pour l'hérédité **[1 p.]**. On conclut en exprimant $E(nx)$ sous sa forme développée **[1 p.]**.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit B la matrice définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel x, on définit la matrice $E_n(x)$ par :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} B^k, \quad \text{que l'on note} \quad E_n(x) = \begin{pmatrix} a_n(x) & c_n(x) \\ b_n(x) & d_n(x) \end{pmatrix}.$$

5. Pour tout entier naturel n, montrer que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.$$

Rapport. On raisonne par récurrence. Pour l'initialisation avec $n = 0$, on obtient bien la matrice identité **[1 p.]**. L'hérédité consiste à calculer $B^n \times B$ par produit matriciel **[1 p.]** et à utiliser les règles de calculs de puissances pour vérifier l'expression voulue **[1 p.]**.

6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^k - (2x)^k}{k!}.$$

Exprimer de même $b_n(x)$, $c_n(x)$, $d_n(x)$ sous la forme d'une somme.

Rapport. Par définition, la matrice $E_n(x)$ s'exprime à partir de $B^0, B^1, \ldots, B^n$ par combinaison linéaire :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} 2-2^k & 1-2^k \\ 2^{k+1}-2 & 2^{k+1}-1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 p.]}$$

On obtient alors $a_n(x)$ en ne tenant compte que du premier coefficient par linéarité **[1 p.]** :

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(2-2^k).$$

D'où le résultat puisque $x^k 2^k = (2x)^k$. Le même raisonnement donne alors :

$$b_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k - (2x)^k}{k!}, \qquad \textbf{[1 p.]}$$

et pour $c_n(x)$ et $d_n(x)$ des expressions analogues **[1 p.]** à l'aide de $x^k 2^{k+1} = 2(2x)^k$.

7. Déterminer les limites de $a_n(x)$, $b_n(x)$, $c_n(x)$, $d_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Rapport. On reconnaît les sommes partielles **[1 p.]** des séries exponentielles de paramètres x et $2x$, qui sont convergentes pour tout x réel **[1 p.]**. On obtient donc par linéarité :

$$a_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2e^x - e^{2x}, \qquad \textbf{[1 p.]}$$

et des expressions analogues pour les trois autres suites **[1 p.]**.

Remarque. La matrice considérée $E(x)$ à la question suivante donne en fait les réponses ! Je vous recommande de toujours lire au moins une question à l'avance pour bien comprendre la direction de l'énoncé.

8. Pour tout x réel, on pose :

$$E(x) = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{2x} & e^x - e^{2x} \\ 2e^{2x} - 2e^x & 2e^{2x} - e^x \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer deux matrices M et N telles que pour tout x réel on ait :

$$E(x) = e^x M + e^{2x} N.$$

Rapport. On commence par décomposer $E(x)$ comme somme de deux matrices **[1 p.]** dont les coefficients sont respectivement proportionnels à e^x et e^{2x}. Puis on factorise par ces réels pour obtenir les deux matrices M et N qui conviennent **[1 p.]**.
Attention, M et N doivent être constantes (ne pas « dépendre de x ») !

b) Calculer M^2, N^2, MN, NM.

Rapport. En posant le calcul, on obtient $M^2 = M$ et $N^2 = N$ **[1 p.]**. De même, on trouve que MN et NM sont nulles **[1 p.]**, mais on ne peut pas affirmer *a priori* que $MN = 0 \Rightarrow NM = 0$ car le produit matriciel n'est pas commutatif en général : aucun point attribué si cette erreur est commise.

c) En déduire que pour tout x réel, $E(x)$ est inversible et déterminer son inverse.

Rapport. Un peu d'inspiration nous pousse à calculer le produit $E(x)E(-x)$ comme dans la première partie **[1 p.]**. On développe et on simplifie à l'aide des relations établies à la question précédente **[1 p.]**, jusqu'à arriver à

$$E(x)E(-x) \;=\; M + N \;=\; I \qquad \textbf{[1 p.]}.$$

On conclut alors de manière habituelle **[1 p.]**.

Exercice 2

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces. Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés. On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé ;
- E_1 l'événement $[D_1 < D_2]$, E_2 l'événement $[D_1 = D_2]$ et E_3 l'événement $[D_1 > D_2]$.

Lors d'une partie,

— si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,

— si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,

— si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur effectue alors une suite de parties indépendantes, en ajoutant les points obtenus successivement. Le score initial est nul.

I. Étude de parties successives

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- X_n la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la n-ième partie ;
- Y_n le score cumulé des n premières parties.

9. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.

Rapport. Le lancer des deux dés peut se modéliser par $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme car les dés sont équilibrés **[1 p.]**. On décompose l'événement E_1 selon la valeur du deuxième dé avec la formule des probabilités totales **[1 p.]**, comme vu en cours, et on obtient $P(E_1) = \dfrac{5}{12}$ **[1 p.]**. On trouve de même $P(E_2) = \dfrac{1}{6}$ **[1 p.]** puis $P(E_3) = \dfrac{5}{12}$ **[1 p.]**.
Certains ont trouvé une jolie astuce : $P(E_1) = P(E_3)$ par symétrie, ce qui permet d'obtenir directement $P(E_1)$ et $P(E_3)$ à partir de $P(E_2)$ car (E_1, E_2, E_3) est un système complet. Bravo !

Grâce à l'équiprobabilité, il était aussi possible de faire les calculs directement par dénombrement.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_n et montrer que $P([X_n \geqslant 1]) = \dfrac{7}{12}$.

Rapport. Tous les variables X_n ont la même loi puisqu'elles résultent de répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire **[1 p.]**.

On commence par déterminer l'image : l'ensemble des valeurs possibles est $X_n(\Omega) = \dots$ **[1 p.]**

Puis on identifie les événements possibles selon le résultat du lancer de dés :

$$[X_n = 0] = E_1, \qquad [X_n = 1] = E_3, \qquad [X_n = 2] = E_2, \quad \textbf{[1 p.]}$$

ce qui donne directement le tableau de loi de X_n :

k	0	1	2
$P([X_n = k])$	5/12	1/6	5/12

[1 p.]

(il est important de vérifier que la somme vaut 1)

Puisque $[X_n \geqslant 1]$ est le complémentaire de $[X_n = 0]$, la probabilité indiquée permet de vérifier nos résultats **[1 p.]**. Il faut penser à se servir aussi des indications implicites fournies par l'énoncé !

11. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_1 ? Déterminer sa fonction de répartition puis la tracer.

Rapport. Le score initial est nul, donc on a simplement $Y_1 = X_1$ et sa loi est celle calculée à la question précédente **[1 p.]**.

On obtient facilement la fonction de répartition **[1 p.]**, constante par morceaux, sur $]-\infty;0[$, $[0;1[$, $[1;2[$ et $[2;+\infty[$. Le tracé ne pose aucun problème **[1 p.]** pour ceux qui ont été attentifs à cette partie du cours. À l'inverse, un graphe qui n'est pas croissant ou dont les ordonnées sortent de $[0;1]$ fait perdre beaucoup de crédibilité à son auteur !

12. **a)** Préciser l'ensemble $Y_2(\Omega)$ des valeurs possibles pour la variable aléatoire Y_2.

Rapport. Question de bon sens. Chacune des deux parties peut rapporter $0, 1$ ou 2 points donc le total pourra valoir $0, 1, 2, 3$ ou 4. **[1 p.]**

b) Pour tous $i \in [\![0;2]\!]$ et $j \in [\![0;2]\!]$, calculer $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau dont les lignes sont indexées par i et les colonnes par j.

Rapport. Il faut absolument rappeler que les parties sont indépendantes **[1 p.]** pour justifier les calculs. Le tableau demandé **[1 p.]** contient alors les 9 produits $P([X_1 = i]) \times P([X_2 = j])$ calculés à partir du tableau de loi des variables aléatoires X_n.

c) Montrer que :

$$P([Y_2 = 3]) = \sum_{i=0}^{2} P\left([X_1 = i] \cap [X_2 = 3 - i]\right),$$

puis en déduire la valeur de cette probabilité.

Rapport. L'allure de la formule rappelle immanquablement les probabilités totales **[1 p.]**. Il suffit de considérer le système complet associé à X_1 **[1 p.]** en remarquant que, puisque $Y_2 = X_1 + X_2$, on a l'égalité d'événements (et donc de leurs probabilités) suivante :

$$[X_1 = i] \cap [Y_2 = 3] = [X_1 = i] \cap [X_2 = 3 - i] \qquad \textbf{[1 p.]}$$

On remarque que cet événement est impossible pour $i = 0$ car 3 n'est pas dans l'image de X_2 **[1 p.]**. Pour calculer la probabilité, il donc reste à sommer deux cases du tableau établi à la question précédente : on trouve $\dfrac{5}{36}$ **[1 p.]**.

d) Déterminer plus généralement la loi de Y_2.

Rapport. Le raisonnement de la question précédente s'adapte directement au calcul des probabilités $P([Y_2 = k])$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ à partir du tableau **[1 p.]**. On en déduit le tableau de loi de Y_2 après quelques calculs à détailler un minimum [2 **p.**].

Ne pas oublier de vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1.

II. Étude du temps d'attente

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements A_n : « le score cumulé est supérieur ou égal à 1 pour la *première fois* à l'issue de la n-ième partie » ainsi que B_n : « le score cumulé est supérieur ou égal à 2 pour la *première fois* à l'issue de la n-ième partie ».

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0, 0, 1, 0, 1, 2, ... alors A_3 et B_5 sont réalisés, mais pas A_4 ni B_6.
Exemple 2 : 0, 0, 0, 2, 1, 2, ... alors A_4 et B_4, mais pas A_5 ni B_5.

13. **a)** Exprimer l'événement C : « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 1 » en fonction des événements $[X_n = 0]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire la probabilité de l'événement C, puis celle de l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement A_n.

15. **a)** Calculer les probabilités $P(B_1)$ et $P(B_2)$.

b) Prouver que, pour $n \geqslant 3$, on a :

$$\mathrm{P}(B_n) = \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} + (n-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \times \frac{7}{12}$$

c) Ce résultat est-il valable pour $n = 1$ et $n = 2$?

d) Établir que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = 1$.

e) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?

Problème

Le problème aborde d'une part, l'analyse mathématique de l'évolution du prix de vente d'un bien sous différents modes d'anticipation d'agents économiques et d'autre part, la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction de profit d'une entreprise.

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction d'offre globale (des entreprises) et p le prix de vente du bien.

On suppose habituellement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est décroissante et que la fonction $O : p \mapsto O(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est croissante.

Si l'équation $O(p) = D(P)$ admet ; une solution p^*, on dit que p^* est *un prix d'équilibre du marché*.

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d'offre $(O(p)) > D(p))$ ou des excès de demande $(D(p) > O(p))$ au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la valeur du prix à l'instant n. On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la quantité offerte O_n à l'instant n à un *prix anticipé* à l'instant $(n-1)$, noté $\widehat{p_n}$, selon la relation $O_n = O(\widehat{p_n})$, où $\widehat{p_0}$ peut être interprété comme un prix d'étude de marché.
On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = D_n$.
Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels .strictement positifs a, b, c et d, avec $a > d$, et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $D(p) = a - bp$ et $O(p) = cp + d$.
Par suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(p_n) = a - bp_n$ et $O(\widehat{p_n}) = c\widehat{p_n} + d$.

16. Dans cette question uniquement, les réels a, b, c et d ont les valeurs suivantes : $a = 40$, $b = 8$, $c = 2$ et $d = 20$.
On suppose que p_0 et. p_1 sont donnés et que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\widehat{p_n} = 2p_{n-1} - p_{n-2}$

a) Établir l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre p^*. Calculer p^*.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$.

c) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function p = calculeTerme(p0, p1, n)` qui renvoie, pour p_0, p_1 et n fixés, le terme p_n.

d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

e) Calculer les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de n, r_1, r_2, p_0, p_1 et p^*.

g) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ? Interpréter.

17. Soit β un paramètre réel vérifiant $0 < \beta \leqslant 1$. 0n suppose que le prix p_0 est donné et que les anticipations de prix sont adaptatives, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\widehat{p_n} = \widehat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \widehat{p}_{n-1}).$$

a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prix courant p_n en fonction du prix anticipé $\widehat{p_n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le prix p_n vérifie l'équation de récurrence suivante :

$$p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}.$$

c) Quel est le prix d'équilibre p^* ? Exprimer p_n en fonction de n, p_0, p^*, b, c et β.

d) En supposant que $p_0 \neq p^*$, montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1$. Quelle est alors sa limite ?

e) Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $c < b$.

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

18. Soit p un paramètre réel positif ou nul et h_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par :
$$h_p(x) = px - \frac{x^3}{3}.$$

a) Dresser 1e tableau de variation de h_p sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les limites aux bornes de l'intervalle de définition, les racines de l'équation $h_p(x) = 0$ et la valeur maximale de h_p sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tracer la courbe représentative de h_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

On considère une entreprise présente sur le marché d'un bien qui adapte son volume de production $x \in \mathbb{R}_+$ à un niveau de prix $p \in \mathbb{R}_+$ donné (par l'équilibre du marché) ou administré (par l'État).

On modélise le *coût total* de l'entreprise par une fonction F définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sa dérivée F', telle que $F(0) = F'(0) = 0$ et $F(x)$ équivalent à sx^r avec $s > 0$ et $r > 1$, lorsque x tend vers $+\infty$. On note F'' la dérivée seconde de F et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F''(x) > 0$.

Soit Π_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $\Pi_p(x) = px - F(x)$

19. **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F'(x) = +\infty$ et que F' admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque, que l'on note S, dont on précisera l'ensemble de définition (*la fonction S est la fonction d'offre de l'entreprise*).

b) Montrer que Π_p est concave sur $\mathbb{R}_+$ et admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum atteint en un seul point.

20. Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $M(p) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \Pi_p(x)$ (*la fonction M est la fonction de profit de l'entreprise*).

a) Pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, exprimer $M(p)$ à l'aide de p, F et S.

b) Montrer que la fonction M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivéee M'.

c) Montrer que la fonction M est convexe et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

21. On suppose que le prix p est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\left\{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est un entier fixé supérieur ou égal à 2. On admettra le théorème suivant.

> *Si X est une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ est de cardinal k, alors pour toute fonction $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, l'espérance de $\varphi(X)$ est donnée par :*
>
> $$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i) P([X = x_i]).$$

a) Montrer que pour tout $i \in [[1, k]]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a : $M\left(p^{(i)}\right) - M(y) \geqslant M'(y)\left(p^{(i)} - y\right)$

b) En déduire pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $E(M(p)) \geqslant M(y) + M'(y)(E(p) - y)$

c) Établir l'inégalité $E(M(p)) \geqslant M(E(p))$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?