Devoir surveillé n^{o} 3

E1A

le samedi 8 novembre 2018

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On suppose que p est un réel fixé de $]0;1[$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux.
On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux .
On note F : « Le billet testé est faux » et B : « La lumière qui s'allume est bleue ».
On note $P_B(\overline{F}) = \alpha$ et $P_{\overline{B}}(F) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.

1. En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer $P(F)$, montrer que
$$P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}.$$
En déduire que $1 - \alpha \leqslant p \leqslant \beta$.
2. Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est
$$P_F(B) = \frac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}.$$
3. On suppose dans cette question uniquement que $\beta = \alpha = 0,95$ et on note
$$x = \alpha + p - 1 = p - 0,05.$$
Montrer que $1 - P_F(B) = \dfrac{0,95x}{0,9(x+0,05)}$.
En déduire deux réels a, b tels que : $\forall x \in [0;1],\ |P_F(B) - 1 + a\,x| \leqslant b\,x^2$.

Exercice 2

4. Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{2}$.
   (a) Déterminer une forme explicite de cette suite.
   (b) En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On considère maintenant (v_n) telle que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \dfrac{v_n}{2}$.
   (a) La méthode utilisée à la question précédente est-elle exploitable ?
   (b) Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_n = v_{n+1} - \dfrac{v_n}{2}$ et $b_n = \dfrac{v_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$
   (c) En déduire que la suite (r_n) définie par $r_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.
   (d) Étudier la convergence de (r_n). À l'aide d'une comparaison, en déduire celles de (a_n), (b_n) puis (v_n).
6. Compléter les `...` dans le script Scilab suivant de manière à représenter graphiquement les 20 premiers termes de la suite (v_n).

```
V = [ ... , ... ]
for k = 3:20
    V(k) = ...
end
plot( ... , V, "+")
```

Exercice 3

Soit a un réel tel que $0 < a < \dfrac{1}{2}$.

Le richissime Balthazar P. engage le génial inventeur Géo T. pour étudier les fluctuations du titre P. à la bourse de Donaldville. Chaque jour, le titre peut *monter*, *rester stable* ou *baisser*. Le célèbre savant observe le comportement suivant : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

— si le titre monte le jour n, alors il continuera à monter le jour $n + 1$ avec probabilité $1 - 2a$, il restera stable avec probabilité a, et il baissera avec probabilité a ;

— si le titre reste stable le jour n, alors il montera le jour $n + 1$ avec probabilité a, restera stable avec probabilité $1 - 2a$, et baissera avec probabilité a ;

— si le titre baisse le jour n, alors il montera le jour $n+1$ avec probabilité a, il restera stable avec probabilité a, et il baissera avec probabilité $1 - 2a$.

Jour 0 : le premier jour de l'investissement, le titre reste stable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les évènements M_n : « le titre monte le jour n », S_n : « le titre reste stable le jour n » et B_n : « le titre baisse le jour n ». On note p_n, q_n et r_n leurs probabilités respectives.

7. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
8. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire une expression de r_n en fonction de p_n et q_n.
9. Montrer que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmético-géométriques.
10. En déduire des expressions explicites de p_n, q_n et r_n en fonction de n.
11. Étudier la convergence des trois suites et déterminer leurs limites éventuelles. Ce résultat vous surprend-il ?
12. (Bonus) Comment s'appelle le père de Balthazar P. ?

Exercice 4

On désigne par m un entier fixé supérieur ou égal à 2. Une urne contient m boules numérotées de 1 à m. On note E l'ensemble de ces boules et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Un dispositif permet d'effectuer le tirage au hasard d'une partie de ces boules, de telle manière que chacune des parties de E (c'est-à-dire chacun des éléments de $\mathcal{P}(E)$, y compris la partie vide ou l'ensemble de toutes les boules) ait la même probabilité d'être tirée.

I. Première expérience : un seul tirage

On effectue un tirage. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant m$, on considère l'évènement

A_i : « la boule portant le numéro i appartient à l'ensemble de boules tirées »

13. (a) Combient d'éléments $\mathcal{P}(E)$ possède-t-il ? Montrer que $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{2}$.
    (b) Quelle est la probabilité d'obtenir toutes les boules ? Quelle est la probabilité de n'en obtenir aucune ?
    (c) Les évènements $(A_1, \dots, A_m)$ sont-t-ils mutuellement indépendants ?
14. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.
    (a) Montrer que : $\forall n \in \{0, \dots, m\}, \quad \mathbb{P}([X = n]) \ = \ \dfrac{1}{2^m}\dbinom{m}{n}$.
    (b) La probabilité qu'on obtienne un nombre pair de boules est-elle supérieure à la probabilité qu'on en obtienne un nombre impair ?
    (c) On définit l'espérance de X par $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} n\,\mathbb{P}([X = n])$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{m}{2}$.
    Indication : on pourra commencer par vérifier que, si $1 \leqslant n \leqslant m$, *alors* $\dbinom{m}{n} = \dfrac{m}{n}\dbinom{m-1}{n-1}$.
15. On rappelle que `grand(1, 1, "uin", a, b)` renvoie un entier aléatoire tiré uniformément dans $[\![\mathtt{a}, \mathtt{b}]\!]$.
    (a) Compléter les `...` dans la fonction suivante de sorte qu'elle simule l'expérience étudiée ici.

```
function partie = experience1(m)
// Renvoie un vecteur contenant les numéros des boules tirées
    partie = []
    n = 0
    for i = ...
    // Pour chaque numéro i de boule dans l'urne
        if grand(1, 1, "uin", 0, 1) == 1 then
            n = n + 1
            partie(n) = ...
        end
    end
endfunction
```

    (b) Expliquez en détails l'utilisation de `grand` dans ce programme.
    (c) Justifier qu'à l'issue de la boucle `for ... end`, la variable `n` vaut le nombre d'éléments de `partie`.

II. Deuxième expérience : tirages répétés avec remise

Soit $k \geqslant 1$ un entier. On effectue maintenant une suite de k tirages indépendants de la forme précédente, en remettant dans l'urne l'ensemble des boules tirées, après chaque tirage.

16. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$.
    (a) Déterminer la probabilité de l'évènement B_i : « la boule numéro i est tirée au moins une fois ».
    (b) Quelle est la probabilité que la boule numéro i soit tirée pour la première fois au k-ième tirage ?
17. On admet, sans justification demandée, que les évènements $(B_1, \dots, B_k)$ sont mutuellement indépendants. Déterminer la probabilité de l'évènement C : « chacune des m boules a été tirée au moins une fois ».
18. (a) Écrire une fonction Scilab d'entête `function test = toutVrai(m, v)` qui prend en paramètres un entier `m` et un vecteur booléen `v` de taille `m` et renvoie `%T` si tous les éléments de `v` valent `%T`, sinon `%F`.
    (b) Compléter les `...` dans la fonction Scilab suivante afin de simuler l'expérience 2. On pourra utiliser la fonction `experience1` de la section précédente pour tirer aléatoirement une partie aléatoire de E, en supposant qu'elle a été correctement complétée.

```
function C = experience2(m, k)
// Renvoie %T ou %F selon que l'évènement C est réalisé ou non
    boulesTirees = zeros(1, m)
    for tirage = ...
    // Pour chacun des k tirages
        partie = ...
        for i = partie
        // Pour chaque numéro de boule du tirage, mise à jour de boulesTirees
            ... = %T
        end
    end
    C = toutVrai(m, boulesTirees)
endfunction
```

III. Troisième expérience : tirages répétés sans remise

On effectue maintenant une suite de tirages indépendants, sans remettre dans l'urne, après chaque tirage, le boules tirées. Chaque tirage consiste encore à prendre au hasard une partie des boules qui restent dans l'urne, chacune des parties de l'ensemble des boules restantes ayant la même probabilité d'être tirée.

19. Considérons l'évènement D : « les m boules sont toutes tirées en au plus deux tirages ».
    (a) En notant comme précédemment X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées au premier tirage, justifier que pour tout $n \in \{0, \dots, m\}$, la probabilité de D sachant $[X = n]$ vaut $\dfrac{1}{2^{m-n}}$.
    (b) Justifier que $([X = 0], \dots, [X = m])$ est un système complet d'évènements, puis en déduire $\mathbb{P}(D)$.
    (c) Calculer la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en *exactement* deux tirages.
20. Pour tout $k \geqslant 1$, déterminer plus généralement la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en au plus k tirages (on pourra raisonner par récurrence). Comparer avec l'expérience précédente.