

Devoir surveillé n° 3

E1A

le samedi 8 novembre 2018

Exercice 1 (d'après ESC 2003)

On suppose que p est un réel fixé de $]0; 1[$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux.

On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux.

On note F : « Le billet testé est faux » et B : « La lumière qui s'allume est bleue ».

On note $P_B(\bar{F}) = \alpha$ et $P_{\bar{B}}(F) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.

1. En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer $P(F)$, montrer que

$$P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}.$$

En considérant le système complet d'évènements (B, \bar{B}) , on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(B \cap F) + P(\bar{B} \cap F) && \text{(probabilités totales)} \\ &= P(B)P_B(F) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(F) && \text{(probabilités composées)} \\ &= P(B)(1 - \alpha) + (1 - P(B))\beta && \text{(probabilités complémentaires)} \\ &= (1 - \alpha - \beta)P(B) + \beta. \end{aligned}$$

Or on sait que $P(F) = p$, donc on obtient (car $1 - \alpha - \beta \neq 0$ par hypothèse) :

$$P(B) = \frac{P(F) - \beta}{1 - \alpha - \beta} = \frac{p - \beta}{1 - \alpha - \beta} = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}$$

En déduire que $1 - \alpha \leq p \leq \beta$.

Puisque P est une probabilité, on sait que $0 \leq P(B) \leq 1$. Or $\alpha + \beta - 1 > 0$, donc par produit :

$$0 \leq \beta - p \leq \alpha + \beta - 1,$$

ce qui équivaut à $p \leq \beta \leq p + \alpha + \beta - 1$ en ajoutant p , d'où $p \leq \beta$ et $1 - \alpha \leq p$.

2. Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est

$$P_{\bar{F}}(B) = \frac{(1 - \alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}.$$

En reprenant les calculs précédents,

$$P_{\bar{F}}(B) = \frac{P(\bar{F} \cap B)}{P(\bar{F})} = \frac{P(B)P_B(\bar{F})}{P(\bar{F})} = P(B) \times \frac{1 - \alpha}{p} = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1} \times \frac{1 - \alpha}{p}$$

d'où le résultat demandé.

3. On suppose dans cette question uniquement que $\beta = \alpha = 0,95$ et on note

$$x = \alpha + p - 1 = p - 0,05.$$

Montrer que $1 - P_{\bar{F}}(B) = \frac{0,95x}{0,9(x + 0,05)}$.

Puisque $\alpha = \beta$, on obtient par calcul algébrique :

$$\begin{aligned} 1 - P_F(B) &= 1 - \frac{(1 - \alpha)(\alpha - p)}{p(2\alpha - 1)} \\ &= \frac{2p\alpha - p - (\alpha - p - \alpha^2 + \alpha p)}{(2\alpha - 1)p} \\ &= \frac{\alpha^2 + p\alpha - \alpha}{(2\alpha - 1)p} \\ &= \boxed{\frac{\alpha(\alpha + p - 1)}{(2\alpha - 1)p}} \end{aligned}$$

Or $\alpha + p - 1 = x$ par définition, et $\alpha = 0,95$ donne $2\alpha - 1 = 0,9$ et $p = 0,05 + x$.

En déduire deux réels a, b tels que : $\forall x \in [0; 1], |P_F(B) - 1 + ax| \leq bx^2$.

À l'aide du développement

$$\frac{1}{x + 0,05} = \frac{1}{0,05} + \frac{0,05 - (x + 0,05)}{(x + 0,05)0,05} = \frac{1}{0,05} + \frac{x}{0,05(x + 0,05)},$$

on obtient :

$$1 - P_F(B) = \frac{0,95x}{0,9 \times 0,05} \left(1 + \frac{x}{x + 0,05} \right).$$

Donc en posant $a = \frac{0,95}{0,9 \times 0,05} = \frac{19}{0,9} = \boxed{\frac{190}{9}}$ et $b = \frac{a}{0,05} = \boxed{\frac{3800}{9}}$, on aura :

$$|P_F(B) - 1 + ax| = 1 - P_F(B) - ax = \frac{ax^2}{x + 0,05} \leq bx^2$$

Exercice 2

4. Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_0 = 0, u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2}$.

(a) Déterminer une forme explicite de cette suite.

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ a un discriminant de 3. Cette équation admet donc deux racines distinctes :

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \mu = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

D'après le théorème de structure vu en cours, on sait qu'il existe deux réels A et B tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\lambda^n + B\mu^n$. Les valeurs de u_0 et u_1 permettent de calculer ces constantes :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\lambda + B\mu = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1} \begin{cases} A + B = 0 \\ B(\mu - \lambda) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ -B\sqrt{3} = 1 \end{cases}$$

On obtient donc $B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)^n \right]$.

(b) En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

On a $1 < \sqrt{3} < 2$, donc $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1$ et $\left| \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} < 1$. D'après le théorème de convergence des suites géométrique, on obtient donc :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad \text{et} \quad \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty} \quad \text{par opérations.}$$

5. On considère maintenant (v_n) telle que $v_0 = 0, v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{v_n}{2}$.

- (a) La méthode utilisée à la question précédente est-elle exploitable ?

On a encore une suite récurrente linéaire d'ordre 2, mais l'équation caractéristique $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ a pour discriminant $-1 < 0$. On ne peut donc pas appliquer le théorème du cours.

- (b) Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_n = v_{n+1} - \frac{v_n}{2}$ et $b_n = \frac{v_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité la plus simple est la deuxième :

$$a_n + b_n = v_{n+1} - \frac{v_n}{2} + \frac{v_n}{2} = v_{n+1}, \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_{n+1}}{2} = b_{n+1}}.$$

Pour l'autre égalité, il suffit de remarquer que $a_n - b_n = v_{n+1} - \frac{v_n}{2} - \frac{v_n}{2} = v_{n+1} - v_n$, d'où :

$$a_{n+1} = v_{n+2} - \frac{v_{n+1}}{2} = v_{n+1} - \frac{v_n}{2} - \frac{v_{n+1}}{2} = \boxed{\frac{v_{n+1} - v_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}}.$$

- (c) En déduire que la suite (r_n) définie par $r_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Cherchons à exprimer r_{n+1} en fonction de r_n . D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} (a_{n+1})^2 + (b_{n+1})^2 &= \frac{(a_n - b_n)^2}{4} + \frac{(a_n + b_n)^2}{4} \\ &= \frac{(a_n)^2 - 2a_nb_n + (b_n)^2}{4} + \frac{(a_n)^2 + 2a_nb_n + (b_n)^2}{4} \\ &= \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $r_{n+1} = \sqrt{\frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $r_0 = \sqrt{1+0} = 1$.

- (d) Étudier la convergence de (r_n) . À l'aide d'une comparaison, en déduire celles de (a_n) , (b_n) puis (v_n) .

Puisque $\sqrt{2} > 1$, le théorème des suites géométriques montre que (r_n) tend vers 0.

Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \geq \sqrt{(a_n)^2} \geq |a_n|$ et de même $r_n \geq |b_n|$. Le théorème d'encadrement (ou plutôt son corollaire) montre alors que (a_n) et (b_n) sont toutes les deux convergentes et de limite nulle.

Puisque $v_n = 2b_n$, on en déduit (par opération), que la suite (v_n) converge vers la limite 0.

6. Compléter les ... dans le script Scilab suivant de manière à représenter graphiquement les 20 premiers termes de la suite (v_n) .

```
V = [ 0 , 1 ]
for k = 3:20
    V(k) = V(k-1) - V(k-2)/2
end
plot( 1:20 , V, "+")
```

Exercice 3 (d'après ECRICOME 2001 E)

Soit a un réel tel que $0 < a < \frac{1}{2}$.

Le richissime Balthazar P. engage le génial inventeur Géo T. pour étudier les fluctuations du titre P. à la bourse de Donaldville. Chaque jour, le titre peut *monter*, *rester stable* ou *baisser*. Le célèbre savant observe le comportement suivant : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- si le titre monte le jour n , alors il continuera à monter le jour $n + 1$ avec probabilité $1 - 2a$, il restera stable avec probabilité a , et il baissera avec probabilité a ;
- si le titre reste stable le jour n , alors il montera le jour $n + 1$ avec probabilité a , restera stable avec probabilité $1 - 2a$, et baissera avec probabilité a ;
- si le titre baisse le jour n , alors il montera le jour $n + 1$ avec probabilité a , il restera stable avec probabilité a , et il baissera avec probabilité $1 - 2a$.

Jour 0 : le premier jour de l'investissement, le titre reste stable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les événements M_n : « le titre monte le jour n », S_n : « le titre reste stable le jour n » et B_n : « le titre baisse le jour n ». On note p_n , q_n et r_n leurs probabilités respectives.

7. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n , q_n et r_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements (M_n, S_n, B_n) forment un système complet. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{n+1}) &= \mathbb{P}(M_{n+1} \cap M_n) + \mathbb{P}(M_{n+1} \cap S_n) + \mathbb{P}(M_{n+1} \cap B_n) \\ &= \mathbb{P}_{M_n}(M_{n+1})\mathbb{P}(M_n) + \mathbb{P}_{S_n}(M_{n+1})\mathbb{P}(S_n) + \mathbb{P}_{B_n}(M_{n+1})\mathbb{P}(B_n)\end{aligned}$$

Le probabilités conditionnelles sont données par l'énoncé. On obtient : $p_{n+1} = (1 - 2a)p_n + aq_n + ar_n$.

En raisonnant de même pour l'évènement S_{n+1} , on trouve $q_{n+1} = ap_n + (1 - 2a)q_n + ar_n$.

8. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire une expression de r_n en fonction de p_n et q_n .

À nouveau, (M_n, S_n, B_n) forme un système complet d'évènement, donc d'après la formule des probabilités totales : $p_n + q_n + r_n = \mathbb{P}(M_n) + \mathbb{P}(S_n) + \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

On en déduit que $r_n = 1 - p_n - q_n$.

9. Montrer que les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont arithmético-géométriques.

En reprenant les résultats précédents, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = (1 - 2a)p_n + aq_n + a(1 - p_n - q_n) = (1 - 3a)p_n + a, \quad \text{et de même} \quad q_{n+1} = (1 - 3a)q_n + a.$$

Les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc arithmético-géométriques.

10. En déduire des expressions explicites de p_n , q_n et r_n en fonction de n .

On commence par résoudre l'équation au point fixe associée à la relation de récurrence de la question précédente : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 - 3a)x + a = x \iff 3ax = a \iff x = \frac{1}{3}$ (car $a \neq 0$). Le théorème des suites arithmético-géométrique garantit alors que les suites $(p_n - \frac{1}{3})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n - \frac{1}{3})_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques de raison $1 - 3a$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n - \frac{1}{3} = (1 - 3a)^n(p_0 - \frac{1}{3}), \quad q_n - \frac{1}{3} = (1 - 3a)^n(q_0 - \frac{1}{3}).$$

L'énoncé indique que le titre est stable le premier jour, donc $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ et $r_0 = 0$. On obtient donc

$$p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - 3a)^n, \quad q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - 3a)^n, \quad r_n = 1 - p_n - q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - 3a)^n.$$

11. Étudier la convergence des trois suites et déterminer leurs limites éventuelles. Ce résultat vous surprend-il ?

On sait que $0 < a < \frac{1}{2}$, donc $0 > -3a > -\frac{3}{2}$, puis $1 > 1 - 3a > -\frac{1}{2}$. On a donc $|1 - 3a| < 1$, donc d'après le théorème de convergence des suites géométriques, $(1 - 3a)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par opérations sur les limites, on obtient donc que les trois suites sont convergentes, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{3}$$

Ce résultat n'est pas très surprenant : les règles d'évolution du système étant symétriques par rapport aux trois états, on peut s'attendre à ce que ces trois états soient équiprobables à la limite.

12. (Bonus) Comment s'appelle le père de Balthazar P. ?

Fergus McPicsou (Fergus McDuck en VO). Frère de John McPicsou et père de Picsou. Né en 1835 à Glasgow et mort en 1902 à Dismal Downs. Meunier de profession, il épousa une jeune irlandaise, Édith O'Drake (Downy O'Drake en VO), en 1867, qui donna naissance à Balthazar, Matilda et Hortense. On lui prête d'autres unions dont furent issus d'autres enfants. [Source : Article Clan McPicsou de Wikipédia]

Exercice 4 (d'après HEC 1996)

On désigne par m un entier fixé supérieur ou égal à 2. Une urne contient m boules numérotées de 1 à m . On note E l'ensemble de ces boules et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Un dispositif permet d'effectuer le tirage au hasard d'une partie de ces boules, de telle manière que chacune des parties de E (c'est-à-dire chacun des éléments de $\mathcal{P}(E)$), y compris la partie vide ou l'ensemble de toutes les boules) ait la même probabilité d'être tirée.

I. Première expérience : un seul tirage

On effectue un tirage. Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq m$, on considère l'évènement

A_i : « la boule portant le numéro i appartient à l'ensemble de boules tirées »

13. (a) Combien d'éléments $\mathcal{P}(E)$ possède-t-il ? Montrer que $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$.

D'après le principe des choix successifs, le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ est $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^m$. De même, le nombre de parties qui réalisent A_1 est 2^{m-1} . On en déduit par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}$$

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir toutes les boules ? Quelle est la probabilité de n'en obtenir aucune ?

Ces deux événements sont réalisés par une seule issue (E et \emptyset respectivement) sur un total de 2^m issues possibles.

Leur probabilité vaut donc : $\frac{1}{2^m}$

(c) Les événements (A_1, \dots, A_m) sont-ils mutuellement indépendants ?

On sait qu'ils sont indépendants si et seulement si, pour tout $I \subset \llbracket 1, m \rrbracket$, $\mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Soit I une partie de $\llbracket 1, m \rrbracket$, et k son cardinal. Alors d'une part : $\mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}$ par choix successifs. Et d'autre part : $\prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i \in I} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$ car les A_i ont tous la même probabilité $\frac{1}{2}$.

Les événements (A_1, \dots, A_m) sont donc mutuellement indépendants.

14. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

(a) Montrer que : $\forall n \in \{0, \dots, m\}$, $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^m} \binom{m}{n}$.

Les issues qui réalisent $[X = n]$ sont exactement les parties de E constituées de n éléments.

Il y en a $\binom{m}{n}$ sur un total de 2^m parties possibles, donc on obtient par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^m} \binom{m}{n}$$

(b) La probabilité qu'on obtienne un nombre pair de boules est-elle supérieure à la probabilité qu'on en obtienne un nombre impair ?

Notons B_0 et B_1 ces deux évènements. Alors $\mathbb{P}(B_0)$ et $\mathbb{P}(B_1)$ sont respectivement la somme des $\mathbb{P}([X = n])$ précédemment pour les $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$ pairs et pour les $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$ impairs. Leur différence peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_0) - \mathbb{P}(B_1) &= \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{1}{2^n} \binom{m}{n} && \text{(car } (-1)^m = \pm 1 \text{ selon la parité de } m) \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n \\ &= \frac{1}{2^m} (1 + (-1))^m = 0 && \text{(par la formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

Conclusion : ces deux évènements ont exactement la même probabilité.

- (c) On définit l'espérance de X par $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^m n \mathbb{P}([X = n])$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{m}{2}$.

Indication : on pourra commencer par vérifier que, si $1 \leq n \leq m$, alors $\binom{m}{n} = \frac{m}{n} \binom{m-1}{n-1}$.

Commençons par l'indication : si $1 \leq n \leq m$, alors

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)!}{n(n-1)!(m-n)!} = \frac{m}{n} \binom{m-1}{n-1}$$

car $(m-1) - (n-1) = m-n$. Autrement dit $n \binom{m}{n} = m \binom{m-1}{n-1}$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^m n \mathbb{P}([X = n]) && \text{(le terme d'indice } n=0 \text{ est nul)} \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^m n \binom{m}{n} && \text{(d'après (a))} \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^m m \binom{m-1}{n-1} && \text{(d'après l'indication)} \\ &= \frac{m}{2^m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} && \text{(changement d'indice } k = n-1) \\ &= \frac{m}{2^m} \times (1+1)^{m-1} && \text{(formule du binôme de Newton)} \\ &= \frac{m}{2^m} \times 2^{m-1} = \frac{m}{2} \end{aligned}$$

15. On rappelle que `grand(1, 1, "uin", a, b)` renvoie un entier aléatoire tiré uniformément dans $\llbracket a, b \rrbracket$.

- (a) Compléter les ... dans la fonction suivante de sorte qu'elle simule l'expérience étudiée ici.

```
function partie = experience1(m)
    partie = []
    n = 0
    for i = 1:m
        if grand(1, 1, "uin", 0, 1) == 1 then
            n = n + 1
            partie(n) = i
        end
    end
end
endfunction
```

- (b) Expliquez en détails l'utilisation de `grand` dans ce programme.

L'instruction `grand(1, 1, "uin", 0, 1)` renvoie un entier aléatoire de $\llbracket 0, 1 \rrbracket$, de façon équiprobable. Les seuls éléments de $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ sont 0 et 1. Et ils ont la même probabilité d'être tirés, $\frac{1}{2}$. Ceci permet de simuler, indépendamment boule par boule, le tirage d'une partie de E :

- 1 \rightarrow « la boule appartient à la partie »
- 0 \rightarrow « la boule n'appartient pas à la partie »

Les questions 13.(a,c) montrent que ceci est équivalent au tirage direct d'une partie de E .

- (c) Justifier qu'à l'issue de la boucle `for ... end`, la variable `n` vaut le nombre d'éléments de `partie`.

La variable `n` est initialisée avec `n = 0`, puis sa valeur est incrémentée d'une unité à chaque fois qu'on ajoute un numéro de boule `i` au vecteur `partie`. On en déduit par récurrence immédiate qu'à chaque itération de la boucle, la valeur de `n` est en fait égal au nombre d'éléments de `partie` (on appelle ceci un *invariant* de boucle), et notamment à l'issue de la dernière itération.

II. Deuxième expérience : tirages répétés avec remise

Soit $k \geq 1$ un entier. On effectue maintenant une suite de k tirages indépendants de la forme précédente, en remettant dans l'urne l'ensemble des boules tirées, après chaque tirage.

16. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$.

- (a) Déterminer la probabilité de l'évènement B_i : « la boule numéro i est tirée au moins une fois ».

L'évènement B_i s'exprime comme la réunion $T_1 \cup \dots \cup T_k$ des évènements T_j : « la boule i est tirée au tirage numéro j ». En considérant \overline{B}_i , on obtient donc par indépendance des (T_j) :

$$\mathbb{P}(B_i) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}_i) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k \overline{T}_j\right) = \boxed{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

puisque, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(\overline{T}_j) = \mathbb{P}(\overline{A}_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

- (b) Quelle est la probabilité que la boule numéro i soit tirée pour la première fois au k -ième tirage ?

Avec les notations précédentes, il s'agit de calculer (en utilisant l'indépendance des (T_j)) :

$$\mathbb{P}(\overline{T}_1 \cap \dots \cap \overline{T}_{k-1} \cap T_k) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2^k}}$$

17. On admet, sans justification demandée, que les évènements (B_1, \dots, B_k) sont mutuellement indépendants. Déterminer la probabilité de l'évènement C : « chacune des m boules a été tirée au moins une fois ».

L'évènement C s'exprime comme l'intersection des (B_i) pour $1 \leq i \leq m$. On a donc par indépendance :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m B_i\right) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(B_i) = \boxed{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m}$$

18. (a) Écrire une fonction Scilab d'entête `function test = toutVrai(m, v)` qui prend en paramètres un entier `m` et un vecteur booléen `v` de taille `m` et renvoie `%T` si tous les éléments de `v` valent `%T`, sinon `%F`.

Il s'agit ici d'utiliser une boucle `for` pour répéter m fois l'opération booléenne « et » :

```
function test = toutVrai(m, v)
    test = %T
    for i = 1:m
        test = test & v(i)
    end
endfunction
```

Remarque. Il existe en fait une fonction Scilab, nommée `and`, qui effectue la même tâche.

- (b) Compléter les `...` dans la fonction Scilab suivante afin de simuler l'expérience 2. On pourra utiliser la fonction `experience1` de la section précédente pour tirer aléatoirement une partie aléatoire de E , en supposant qu'elle a été correctement complétée.

```

function C = experience2(m, k)
// Renvoie %T ou %F selon que l'évènement C est réalisé ou non
    boulesTirees = zeros(1, m)
    for tirage = 1:k
// Pour chacun des k tirages
        partie = experience1(m)
        for i = partie
// Pour chaque numéro de boule du tirage, mise à jour de boulesTirees
            boulesTirees(i) = %T
        end
    end
    C = toutVrai(m, boulesTirees)
endfunction

```

III. Troisième expérience : tirages répétés sans remise

On effectue maintenant une suite de tirages indépendants, sans remettre dans l'urne, après chaque tirage, les boules tirées. Chaque tirage consiste encore à prendre au hasard une partie des boules qui restent dans l'urne, chacune des parties de l'ensemble des boules restantes ayant la même probabilité d'être tirée.

19. Considérons l'évènement D : « les m boules sont toutes tirées en au plus deux tirages ».

- (a) En notant comme précédemment X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées au premier tirage, justifier que pour tout $n \in \{0, \dots, m\}$, la probabilité de D sachant $[X = n]$ vaut $\frac{1}{2^{m-n}}$.

Soit $n \in \{0, \dots, m\}$. Sachant que n boules ont été tirées au premier tirage, D sera réalisé si et seulement si les $m - n$ boules restantes sont tirées au deuxième tirage. Ceci correspond à une seule issue sur un total de 2^{m-n} issues possible, d'où le résultat par équiprobabilité.

- (b) Justifier que $([X = 0], \dots, [X = m])$ est un système complet d'évènements, puis en déduire $\mathbb{P}(D)$.

Ces évènements sont deux à deux incompatibles car, pour chaque issue de l'expérience, X ne prend qu'une seule valeur. De plus, $\{0, 1, \dots, m\}$ est l'ensemble des valeurs possibles pour X , donc :

$$\bigcup_{n=0}^m [X = n] = \Omega.$$

Ceci montre que les évènements $([X = n])$ forment un système complet. Alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(D) &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}([X = n] \cap D) && \text{(par probabilités totales)} \\
 &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}_{[X=n]}(D) && \text{(par probabilités composées)} \\
 &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^m} \binom{m}{n} \frac{1}{2^{m-n}} && \text{(questions précédentes)} \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} 2^n && \text{(puissances)} \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} (1 + 2)^m && \text{(binôme de Newton)} \\
 &= \left(\frac{3}{4} \right)^m && \text{(puissances)}
 \end{aligned}$$

- (c) Calculer la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en *exactement* deux tirages.

Notons D^* cet évènement. Les boules sont toutes tirées au premier tirage si et seulement $[X = m]$, donc D s'exprime comme l'union $[X = m] \cup D^*$ et ces deux évènements sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}(D^*) = \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}([X = m]) = \left(\frac{3}{4} \right)^m - \left(\frac{1}{2} \right)^m$$

20. Pour tout $k \geq 1$, déterminer plus généralement la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en au plus k tirages (on pourra raisonner par récurrence). Comparer avec l'expérience précédente.

Notons $C_{k,m}$ l'évènement « les m boules sont tirées en au plus k tirages ». On raisonne comme à la question 19 en considérant le nombre X de boules obtenues lors du premier tirage : si n boules ont été obtenues, alors il faut encore tirer les $m - n$ boules restantes en au plus $k - 1$ tirages, d'où la relation :

$$\mathbb{P}_{[X=n]}(C_{k,m}) = \mathbb{P}(C_{k-1,m-n}),$$

valable pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \{0, \dots, m\}$. La formule des probabilités totales donne alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_{k,m}) &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}([X = m]) \mathbb{P}(C_{k-1,m-n}) \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \mathbb{P}(C_{k-1,m-n}). \end{aligned}$$

On a calculé précédemment $\mathbb{P}(C_{2,m}) = \mathbb{P}(D) = \left(\frac{3}{4}\right)^m$, quel que soit m , donc on obtient alors :

$$\mathbb{P}(C_{3,m}) = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \mathbb{P}(C_{2,m-n}) = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{m-n} = \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{3}{4}\right)^m = \left(\frac{7}{8}\right)^m.$$

On peut donc conjecturer que la propriété \mathcal{P}_k suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_k : \forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(C_{k,m}) = \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right)^m$$

Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $k = 1$, ceci est vrai car $\mathbb{P}(C_{1,m}) = \mathbb{P}[X = m] = \frac{1}{2^m} = \left(\frac{2^1 - 1}{2^1}\right)^m$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que \mathcal{P}_k est vraie et montrons \mathcal{P}_{k+1} . D'après la discussion précédente, on sait que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_{k+1,m}) &= \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \mathbb{P}(C_{k,m-n}) \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right)^{m-n} \\ &= \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{2^k - 1}{2^k}\right)^m \\ &= \left(\frac{2^k + 2^k - 1}{2 \times 2^k}\right)^m, \end{aligned}$$

d'où \mathcal{P}_{k+1} puisque $2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

- Par récurrence, on en déduit que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_k$.

Comparaison. On remarque que $\left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m$, donc on retrouve le même résultat que dans l'expérience précédente. Du point de vue de cet évènement, les deux expériences sont donc équivalentes. Ceci s'explique intuitivement par le fait que dans l'expérience avec remise, les boules qui ont déjà tirées ne « comptent plus » par la suite pour la réalisation de l'évènement.