Devoir sur table n° 3

Option économique

MATHÉMATIQUES E1B

Samedi 01 Décembre 2018, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 : Melting-pot

1. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2e^n - ne^{2n}}{n^3\ln n - n(\ln n)^3}$
   (b) En déduire un équivalent de la suite ci-dessus.

2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n}\right)$
   (b) En déduire un équivalent de la suite ci-dessus.

3. (a) Calculer et simplifier $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k}$.
   (b) En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

4. (a) On considère l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3^x \end{array}$.
   L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
   On justifiera les réponses avec soin.
   (b) Ecrire en SCILAB la fonction f définie ci-dessus.

5. On considère l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n+1 \end{array}$.
   L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
   On justifiera les réponses avec soin.

6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1+3v_n}{4}$.
   Donner une formule explicite de v_n.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1. Que dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$? Et si $u_0 = 1$?
2. Dans cette question on suppose que $0 < u_0 < 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.
   (c) Déterminer sa limite.
3. Dans cette question, on suppose que $u_0 < 0$.
   (a) Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$.
   (b) La suite est-elle minorée ? (On pourra raisonner par l'absurde).
   (c) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée u_n.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (b) Calculer u_1.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; f_n(0) < f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right)$.
   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 0 < u_n < \frac{2}{3}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. En déduire que $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{2}{3}$.
3. (a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la valeur de ℓ.

Problème : la série harmonique et ses amies

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les suites suivantes :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad x_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad y_n = H_n - \ln(n+1).$$

Partie 1

1. (a) Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

   On **admettra** dans la suite de l'exercice qu'on a $\dfrac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1)$ pour $n \geq 2$.

   (b) Ecrire en SCILAB la fonction f définie ci-dessus.

   (c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

   (d) En déduire la nature de la suite (H_n) quand n tend vers $+\infty$?

   (e) Étudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n).

   (f) Montrer que (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

   (g) En déduire qu'il existe un réel γ (qu'on ne cherchera pas à calculer) tel que
   $$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$$

   (h) En déduire que (H_n) est une suite divergente vers $+\infty$ et montrer que $H_n \sim \ln n$, au voisinage de $+\infty$.

Partie 2

2. On s'intéresse désormais à la suite (z_n) définie pour $n \geq 0$ par $z_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

   (a) Calculer les valeurs de z_0, z_1, z_2 et z_3. On présentera des résultats simplifiés.

   (b) Étudier la monotonie de la suite (z_n).

   (c) Démontrer que $z_n \leq 1$ lorsque que $n \geq 1$. En déduire que (z_n) est convergente.

   (d) Prouver que $x_{2n} - x_n = z_n - \ln 2$, et en déduire la limite de (z_n).

   On admettra et utilisera le résultat suivant sur les suites extraites : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers un réel α, alors la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite convergente, de limite α.

Partie 3

3. On souhaite démontrer à nouveau (via une nouvelle méthode) le résultat de la question 1.d

   (a) Calculer $H_{2n} - H_n$. Reconnaitre une suite déjà rencontrée dans le problème.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

   (c) Étudier la monotonie de la suite (H_n).

   (d) En déduire que la nature (convergence ou divergence) de la suite (H_n).