Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

E1A

le lundi 5 novembre 2018

La calculatrice est interdite. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées. Les résultats seront mis clairement en évidence. On respectera l'ordre et la numérotation des questions. On commencera chaque exercice sur une nouvelle page. Les ratures tout comme l'abus de blanc correcteur sont à éviter.

Questions courtes

1. Calculer $\dbinom{11}{3}$.
2. Pour tout n entier naturel, simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{4}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{4-3k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{3^{2k}}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+4)^3}{(k+1)^5} = \frac{8^{n-1}\,(n+2)}{((n+1)!)^2}$
4. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}\sqrt{3x}$.
   (b) Écrire une fonction Scilab d'entête « `function y = f(x)` » permettant de calculer une valeur approchée de $f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

Exercice 1

5. Exprimer sous forme explicite la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -3a_n + 2$.
6. Exprimer sous forme explicite la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_0 = 4$, $b_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = -3b_{n+1} - 2b_n$.
7. Soit γ un réel fixé tel que $0 < \gamma < 1$ et soit f la fonction $x \mapsto 2x - x^2$.
   On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_0 = \gamma$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = f(c_n)$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire que $0 < f(\gamma) < 1$.
   (c) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 < c_n < 1$.
   (d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(1 - c_n)$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 2.
   (e) En déduire une forme explicite de u_n, puis de c_n.
8. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = \dfrac{5}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = \sqrt{5\,d_n - 6}$.
   (a) Justifier que $2 < \dfrac{5}{2} < \sqrt{\dfrac{13}{2}} < 3$.
   (b) Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2 et majorée par 3.
   (c) En déduire la monotonie de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Écrire une fonction Scilab d'entête « `function d = calculeTerme(n)` » telle que, pour tout n entier naturel, `calculeTerme(`n`)` renvoie une valeur approchée de d_n.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $a^b = b^a$ d'inconnue (a,b) dans $\mathbb{N}^2$.
On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

9. Pour tous $(a,b) \in]0;+\infty[^2$, montrer que $a^b = b^a$ si et seulement si $f(a) = f(b)$.
10. En admettant que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, dresser le tableau de variation de la fonction f.
11. Pour tout $a \geqslant 3$ fixé, en déduire le nombre de solutions b de l'équation $a^b = b^a$ dans $[3;+\infty[$.
12. Résoudre l'équation $1^b = b^1$ d'inconnue b dans $\mathbb{N}$.
13. Résoudre l'équation $2^b = b^2$ d'inconnue b dans $\mathbb{N}$.
14. Conclure en déterminant l'ensemble des couples d'entiers $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a^b = b^a$ et $a < b$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k.$$

L'objectif de l'exercice est d'établir une expression simplifiée de $f_n(x)$. On considère pour cela la fonction auxiliaire g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

15. *Quelques cas particuliers.*
    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.
    (b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(2) = (n-1)\,2^{n+1} + 2$.
16. *Lien entre f_n et g_n'.*
    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}'(x) = g_n'(x) + (n+1)\,x^n$.
    (b) En déduire que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}.$$
    (c) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x\, g_n'(x)$.
17. *Simplification.* Soit n un entier naturel.
    (a) Rappeler la simplification usuelle de la somme $g_n(x)$ en fonction du réel x.
    (b) En déduire que g_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
    $$g_n'(x) = \frac{1 - (n+1)\,x^n + n\,x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$
18. *Application.*
    (a) Retrouver à l'aide des questions précédentes les résultats de la question 15.
    (b) Simplifier de même : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$

Exercice 4

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \longmapsto (x+\ln(x))e^{x-1}$$

19. *Étude de la fonction.*
    (a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
    (b) Établir :
    $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \ln(x)+\frac{1}{x} > 0.$$
    (c) En déduire :
    $$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x+\ln(x)+1+\frac{1}{x} > 0.$$
    (d) En déduire les variations de f.
    (e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f de f au point d'abscisse 1.
    (f) Montrer que $f(x) \geqslant e^x$ sur $[e;+\infty[$, et $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2e}\ln(x)$ sur $]0;e^{-1}]$.
    (g) Tracer l'allure de la courbe C_f.
20. *Étude d'une suite récurrence associée.*
    On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
    (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
    (b) Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant e^n$.
    La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ?
    (c) Exprimer, sous la forme d'une partie entière, un entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.
21. *Étude d'un système d'équations associé.*
    On considère le système suivant, qu'on notera $\mathcal{S}$, d'inconnue le couple $(x,y) \in]0;+\infty[^2$:
    $$\begin{cases} f(x) = e^{(x+y)/2} \\ f(y) = e^{(x+y)/2} \end{cases}$$
    (a) Montrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle qu'on ne demande pas de préciser.
    (b) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, le couple (x,y) est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si :
    $$x = y \quad \text{et} \quad x+\ln(x) = e.$$
    (c) Montrer que l'équation $x+\ln(x) = e$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$. En déduire l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$.
    (d) Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda+\mu = 2f'(\alpha)-e^{\alpha}$ et $\lambda\times\mu = (f'(\alpha)-\frac{1}{2}e^{\alpha})^2-\frac{1}{4}e^{2\alpha}$.
    Que peut-on dire des signes de λ et μ ?