Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 0

E1A

le samedi 8 septembre 2018

La calculatrice est interdite. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et rédigées. Les résultats seront mis clairement en évidence. On respectera l'ordre et la numérotaton des questions. On commencera chaque exercice sur une nouvelle page. Les ratures tout comme l'abus de blanc correcteur sont à proscrire.

Exercice I

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x, exprimée en milliers de tonnes.
Le coût total de fabrication est donné pour tout $x \in [0; 5]$ par :

$$C_T(x) = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\ln(x+1).$$

Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1).$$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   Vérifier que pour tout $x \in [0; 5]$ on peut écrire $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.
2. Établir le tableau de variations de f sur $[0; 5]$.
3. En admettant que $1 < \ln(6) < 2$, en déduire que f s'annule sur $]0; 5]$ pour une valeur unique a.
4. Déduire des résultats précédents le tableau de signe de f sur $[0; 5]$.

B. Étude d'un coût moyen

La fonction coût moyen C_m est définie sur $]0; 5]$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right].$$

1. Calculer la dérivée C_m' de la fonction C_m.
   Vérifier que pour tout $x \in [0; 5]$, $C_m'(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la partie **A**.
2. Étudier le sens de variation de C_m sur $]0; 5]$.
3. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en francs par tonnes ?
   Quel est ce coût ?

Exercice II

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$.
   (a) Tracer dans un même repère orthonormal d'unité 2 cm la représentation graphique (D) de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   (b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
   (c) En faisant apparaître le mode de construction, utiliser ce graphique pour représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en partant du point de coordonnées $(1, 0)$.
   (d) Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Montrer que, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$.
   Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser son premier terme v_0.
   (b) Pour tout n entier naturel, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Justifier que pour tout n entier naturel : $1 + v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = u_n$.
   (d) En déduire que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4.$$
   (e) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   (f) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice III

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60 % permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40 % exactement deux places de cinéma.
La notation $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les évènements suivants :
   G : « Le client achète une tablette gagnante » ;
   U : « Le client gagne exactement une place de cinéma » ;
   D : « Le client gagne exactement deux places de cinéma ».
   (a) Donner $P(G)$, $P_G(U)$ et $P_G(D)$.
   (b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.
   (c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.
   (a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.
   (b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.
   (c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29 (on pourra s'aider d'un arbre).