Concours blanc n° 1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

Mercredi 9 janvier 2019, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{rcl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in\ ]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Pour tout x de $[0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ en justifiant la dérivabilité.
   (b) Étudier les variations de f', puis celles de f.
   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. (a) Écrire une fonction Scilab d'entête `function y = f(x)` qui renvoie, pour tout $x \in [0;+\infty[$ donné en argument, une valeur approchée de $f(x)$.
   (b) Écrire une fonction Scilab d'entête `function u = calculeTerme(u0, n)` qui renvoie, pour tous $u_0 \in\ ]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés en arguments, une valeur approchée de u_n. On pourra utiliser la fonction `f` précédemment définie.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.
4. On suppose dans cette question que $u_0 = e - 1$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Dans les questions qui suivent, on pourra admettre sans démonstration que : s'il existe un réel $\ell \in [0;+\infty[$ tel que (u_n) converge vers ℓ, alors $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

5. On suppose dans cette question : $u_0 \in\ ]e-1;+\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $e - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.
   Puis, montrer par l'absurde que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) Dans cette question, $u_0 = 2$. Recopier et compléter le programme Scilab suivant afin qu'il calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1000$. On pourra utiliser la fonction `calculeTerme` définie précédemment. Justifier que le programme s'arrête et affiche le bon résultat.

```
n = ...
while ...
    n = ...
end
disp(n)
```

6. On suppose dans cette question : $u_0 \in]0; e-1[$.

   (a) Montrer que : $\forall x \in]0; e-1[\,,\ f(x) < x$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire qu'elle converge vers 0.

Exercice 2

Soit p un entier naturel fixé.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

7. (a) Montrer que si $p = 0$, alors la suite (S_n) est arithmétique et étudier sa limite.

   (b) Établir que, pour tout $x \in [2; +\infty[\,,\ \dfrac{1}{x} \geqslant \ln(x+1) - \ln(x)$.

   (c) Pour $p = 1$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \geqslant \ln(n+2) - \ln(2)$, puis étudier la limite de (S_n).

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(n+p+2)\,u_{n+2} = (n+2)\,u_{n+1}$.

   (b) En déduire par récurrence sur n que $S_n = \dfrac{1}{p-1}\Big(1 - (n+p+1)\,u_{n+1}\Big)$.

9. (a) On pose $v_n = (n+p)\,u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

   (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que (S_n) est convergente et exprimer sa limite en fonction de p et de ℓ.

10. (a) Montrer que $v_n \sim n\,u_n$ et que $u_n \sim \dfrac{p!}{n^p}$ lorsque $n \to +\infty$.

    (b) En déduire la valeur de ℓ puis exprimer, en fonction de p seulement, la limite de (S_n).

Problème

On étudie dans ce problème quelques aspects élémentaires de la génétique liés aux probabilités.

Dans tout le problème, on considère une population répartie entre mâles et femelles, portant chacun des chromosomes contenant eux-mêmes des gènes. Les chromosomes, et donc les gènes, vont par paires.
On s'intéresse à une paire de gènes particuliers pouvant présenter chacun seulement deux caractères, que l'on notera A et a. L'ordre n'intervenant pas, il y a donc trois paires de *génotypes* possibles, désignées par

$$AA, \qquad Aa \text{ (ou } aA), \qquad aa$$

On suppose les sexes mâle et femelle équirépartis dans la population et les accouplements aléatoires. Dans une filiation, chaque enfant reçoit un gène de chaque géniteur (père et mère) avec équiprobabilité, pour constituer une paire, et les transmissions de gènes sont indépendantes.

Partie I : un exemple, la couleur des yeux

La couleur des yeux chez l'être humain est déterminée par un gène correspondant au modèle précédent. Seuls les individus possédant le génotype aa ont les yeux *clairs* (bleus, verts, etc.), tous les autres ont les yeux *foncés*.
On considère une famille qui attend la naissance d'un enfant.

11. (a) Les parents de la future maman ont les yeux foncés mais son frère a les yeux clairs. Quels sont les génotypes des parents ? En déduire la probabilité de F : « la future maman a les yeux foncés ».
    (b) Sachant que la future maman a les yeux foncés, quelle est la probabilité de l'évènement G : « la future maman possède le génotype Aa » ?
    (c) On sait aussi que le futur papa a les yeux clairs. Calculer la probabilité que le bébé ait les yeux clairs compte tenu des informations précédentes.
12. On suppose que les futurs parents possèdent respectivement les génotypes Aa et aa. Ce couple a en tout n enfants, où $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces n enfants ait les yeux foncés ?

Partie II : principe de Hardy–Weinberg

On note u_0, $2v_0$, w_0 respectivement les probabilités qu'un individu de la population initiale possède les génotypes AA, Aa et aa (dans la population mâle comme dans la population femelle initiale). On a alors $u_0 + 2v_0 + w_0 = 1$.
On pose de plus

$$p_0 = u_0 + v_0 \qquad \text{et} \qquad q_0 = v_0 + w_0.$$

13. Que représentent p_0 et q_0 ? Exprimer la proportion de gènes de type A par rapport aux gènes de type a.
14. (a) On choisit aléatoirement un mâle et une femelle dans la population initiale. Justifier qu'il y a 9 couples de génotypes possibles et déterminer leurs probabilités sous forme de tableau.
    (b) Vérifier que les probabilités des génotypes AA, Aa et aa à la première génération (c'est-à-dire pour la population constituée des enfants) sont respectivement

$$u_1 = p_0^2, \qquad 2v_1 = 2p_0q_0, \qquad w_1 = q_0^2. \tag{1}$$

    (c) Déterminer plus généralement les probabilités u_n, $2v_n$, w_n, des génotypes AA, Aa et aa respectivement, à la n-ième génération (c'est-à-dire après n filiations) et préciser, la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. Ceci montre qu'on atteint approximativement la stabilité des génotypes dès la première génération, quelle que soit la répartition initiale.

Partie III : sélection

Dans cette partie, on fait l'hypothèse supplémentaire que les individus de type aa ne peuvent se reproduire ; on suppose donc un accouplement aléatoire seulement parmi les individus de type AA ou Aa. On désigne toujours par $u_0, 2v_0, w_0$ respectivement les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans les populations male et femelle initiales. On suppose $w_0 \neq 1$

15. (a) Quelle est la proportion de parents possibles dans la population totale initiale ?

    (b) Déterminer en fonction de u_0 et v_0 les proportions des génotypes AA et Aa parmi les parents.

    (c) On pose

    $$p_0 = \frac{u_0 + v_0}{1 - w_0} \text{ et } q_0 = \frac{v_0}{1 - w_0}$$

    Montrer qu'alors les proportions des trois génotypes dans la première génération (celle des enfants) sont encore données par les formules (1).

    (d) Peut-on avoir $w_1 = 1$?

16. (a) On désigne toujours par $u_n, 2v_n, w_n$ les proportions des génotypes AA, Aa et aa respectivement à la n-ième génération et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

    $$p_n = \frac{u_n + v_n}{1 - w_n} \text{ et } q_n = \frac{v_n}{1 - w_n} \tag{2}$$

    Calculer les probabilités $u_{n+1}, 2v_{n+1}, w_{n+1}$ pour un enfant de la $(n+1)$-ième génération d'être de génotype AA, Aa, aa respectivement.

    (b) Montrer alors les relations de récurrence :

    $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} = \frac{1}{1 + q_n} \text{ et } q_{n+1} = \frac{q_n}{1 + q_n} \tag{3}$$

    (c) En déduire q_n puis w_n en fonction de n et de q_0. (On pourra commencer par déterminer $1/q_n$, quand il est défini.)

    Déterminer $\lim_{n \to +\infty} w_n$. Interprétation ?