Correction du concours blanc n$^{\text{o}}$ 2

Option Économique

MATHÉMATIQUES

Mercredi 9 janvier 2019, de 8h à 12h

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Pour tout x de $[0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ en justifiant la dérivabilité.

• Pour que f existe, il faut satisfaire la condition $1+x>0$, i.e $x>-1$. Ainsi, f est définie sur $]-1;+\infty[$. De plus, f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et donc en particulier sur $[0;+\infty[$, car somme et composée de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$. Ceci justifie le calcul de f' ci-dessous :

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

• A nouveau, f' est dérivable sur $[0;+\infty[$ car composée, somme et quotient de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$; ceci justifie le calcul de f'' ci-dessous :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2+x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Il est clair que sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction f'' est strictement positive (le signe de f'' étant donné par le signe de son numérateur puisque son dénominateur est toujours strictement positif sur $[0;+\infty[$).

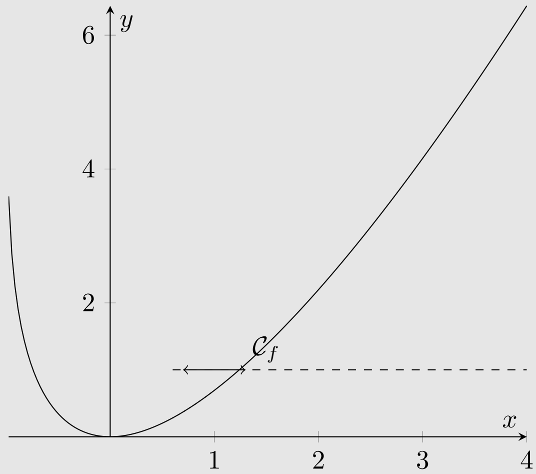
(b) Étudier les variations de f', puis celles de f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f''(x)$	$+$
Variations de f'	$0 \nearrow +\infty$

On en déduit alors immédiatement les variations de f' puis celles de f en calculant $f'(0)=0$ et $f(0)=0$. D'où le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$

(c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.



2. (a) Écrire une fonction Scilab d'entête `function y = f(x)` qui renvoie, pour tout $x \in [0; +\infty[$ donné en argument, une valeur approchée de $f(x)$.

```
function y = f(x)
    y = x * log(1 + x)
endfunction
```

(b) Écrire une fonction Scilab d'entête `function u = calculeTerme(u0, n)` qui renvoie, pour tous $u_0 \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés en arguments, une valeur approchée de u_n. On pourra utiliser la fonction `f` précédemment définie.

```
function u = calculeTerme(u0,n)
    u = u0
    for k = 1:n
        u = f(u)
    end
endfunction
```

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.

ATTENTION : cette question n'est pas une question du type "théorème de la bijection" ; on ne demande PAS de montrer que l'équation... admet une UNIQUE SOLUTION ! On ne demande pas l'existence de solutions mais la résolution. Il fallait procéder naturellement en résolvant :

$f(x) = x \Longleftrightarrow f(x) - x = x(\ln(1+x) - 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $\ln(1+x) - 1 = 0$

Or on a en particulier : $\ln(1+x) = 1 \Longleftrightarrow 1+x = e \Longleftrightarrow x = e-1$

$$\textit{BILAN :}\ \boxed{f(x) = x \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e-1}$$

4. On suppose dans cette question que $u_0 = e-1$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

On suppose dans cette question : $u_0 = e-1$. On calcule u_1, u_2 et on conjecture que la suite (u_n) est constante, égale à $e-1$. Prouvons notre conjecture par récurrence (immédiate) sur $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\mathcal{P}_n$: "$u_n = e-1$".

• *Initialisation* à $n = 0$: il est clair par hypothèse que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie ; *i.e* montrons que $u_{n+1} = e-1$.
Par hypothèse de récurrence, on a que $u_n = e-1$. D'où, par calcul immédiat, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) = (e-1)\ln(e) = e-1.$$

• *Conclusion* : la propriété est démontrée pour tout entier naturel n.

Dans les questions qui suivent, on pourra admettre sans démonstration que : s'il existe un réel $\ell \in [0; +\infty[$ tel que (u_n) converge vers ℓ, alors $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

5. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1; +\infty[$.

   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $e-1 < u_n \leqslant u_{n+1}$.

   On suppose dans cette question : $u_0 > e-1$. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\mathcal{P}_n$: "$e-1 < u_n \leqslant u_{n+1}$".

   • *Initialisation* à $n = 0$: on a déjà que $e-1 < u_0$ par hypothèse. Il reste à montrer que $u_0 \leqslant u_1$. Calculons donc u_1.
   $u_1 = f(u_0) > f(e-1) = e-1$
   Pour comparer u_0 et u_1, on étudie le signe de $f(x) - x$ sur $[0; +\infty[$ (car $u_0 \geqslant 0$).
   Or $f(x) - x = x(\ln(1+x) - 1)$. Donc $f(x) - x > 0$ si $x > e-1$. Comme par hypothèse $u_0 > e-1$, on en déduit alors que $f(u_0) - u_0 > 0$ et $u_1 > u_0$. Donc $e-1 < u_0 \leqslant u_1$: ceci montre que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   • *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie ; *i.e* montrons que $e-1 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que $e-1 < u_n \leqslant u_{n+1}$. D'où par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(e-1) < f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ *i.e* $e-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$
   • *Conclusion* $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ e-1 < u_n \leqslant u_{n+1}.}$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.
   Puis, montrer par l'absurde que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   D'après la question précédente, on en déduit que la suite (u_n) est croissante, donc en particulier : pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant u_0$.
   Par ailleurs, d'après le théorème de convergence monotone, comme la suite est croissante : soit elle

est majorée et dans ce cas, elle converge vers un réel ; soit elle n'est pas majorée et dans ce cas, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que la suite est majorée, , alors elle converge vers un réel ℓ.

• On a alors d'une part que $\ell \geqslant u_0$ par passage à la limite dans l'inégalité $u_n \geqslant u_0$.

• On a d'autre part, par passage à la limite dans la relation de récurrence de la la suite (u_n) (+ argument de suite extraite) et par continuité f en ℓ : $f(\ell) = \ell$. Ceci revient donc (d'après la question 3) à $\ell = 0$ ou $\ell = e - 1$ ce qui est impossible car $\ell \geqslant u_0 > e - 1 > 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Comme } (u_n) \text{ n'est pas majorée, on en déduit que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

(c) Dans cette question, $u_0 = 2$. Recopier et compléter le programme Scilab suivant afin qu'il calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1000$. On pourra utiliser la fonction `calculeTerme` définie précédemment. Justifier que le programme s'arrête et affiche le bon résultat.

```
n = 0
while calculeTerme(2,n) <= 1000
    n = n+1
end
disp(n)
```

6. On suppose dans cette question : $u_0 \in]0; e-1[$.

(a) Montrer que : $\forall x \in]0; e-1[\,,\ f(x) < x$.

Soit $x \in]0, e-1[$. Étudions le signe de $f(x) - x$. On a :

$$f(x) - x = x(\ln(1+x) - 1).$$

Comme par hypothèse $x > 0$, le signe de $f(x) - x$ est donné par celui de $\ln(1+x) - 1$. Or (par croissance de l'exponentielle) :

$$\ln(1+x) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x < e \Leftrightarrow x < e - 1.$$

$$\boxed{\text{BILAN : on a donc : } \forall\ 0 < x < e-1,\ \ f(x) < x.}$$

(b) Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire qu'elle converge vers 0.

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\mathcal{P}_n : 0 < u_n < e - 1$:

• Initialisation : par hypothèse , $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie ;

$$i.e \text{ montrons que } 0 < u_{n+1} < e - 1.$$

Par hypothèse de récurrence, $0 < u_n < e - 1$. On en déduit alors par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}^+$: $f(0) < f(u_n) < f(e-1) = e - 1$ i.e $0 < u_{n+1} < e - 1$.

• *Conclusion* : Donc pour tout entier naturel n, on a donc $0 < u_n < e - 1$ et donc d'après la question précédente : $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$.

Ceci signifie exactement que la suite (u_n) est décroissante ; elle est par ailleurs minorée par 0 donc convergente vers une limite ℓ par théorème de convergence monotone.

• Notons d'une part que $\ell \geqslant 0$ par passage à la limite dans l'inégalité $u_n \geqslant 0$.

• D'autre part, par continuité de f en ℓ, on a par passage à la limite dans la relation de récurrence de la suite (u_n) (+ argument de suite extraite) :

$$f(\ell) = \ell$$

d'où $\ell = 0$ ou $\ell = e - 1$.
Mais comme pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_0$ (car la suite est décroissante) on en déduit alors par passage à la limite dans l'inégalité que $\ell \leqslant u_0 < e - 1$ donc $\ell \neq e - 1$

$$\textit{BILAN :}\ \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

Remarque générale : on retrouve un phénomène bien connu des suites récurrentes : selon la position de la donnée initiale u_0, le comportement asymptotique de la suite (u_n) est complètement différent (divergence vers l'infini, convergence vers un réel).

Exercice 2

Soit p un entier naturel fixé.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

7. (a) Montrer que si $p = 0$, alors la suite (S_n) est arithmétique et étudier sa limite.

Si $p = 0$ on a $u_n = \dfrac{1}{\binom{n}{n}} = 1$ donc la suite (u_n) est constante égale à 1. On en déduit alors immédiatement le calcul de (S_n) :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Montrons que la suite (S_n) est arithmétique ; pour ce faire, on calcule pour tout entier naturel n, la différence $S_{n+1} - S_n$: Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = (n+1) - n = 1,$$

Ceci signifie que $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ est arithmétique de raison } r = 1}$; et on a

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$

(b) Établir que, pour tout $x \in [2; +\infty[$, $\dfrac{1}{x} \geqslant \ln(x+1) - \ln(x)$.

• Méthode 1 : via la méthode de la fonction auxiliaire en introduisant la fonction φ définie par :

$$\forall x \geqslant 2,\ \ \varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}.$$

Il s'agit alors d'étudier la fonction φ et de montrer que :

$$\forall x \geqslant 2,\ \ \varphi(x) \leqslant 0.$$

Il est clair que la fonction φ est définie, dérivable sur $]0,+\infty[$ donc en particulier dérivable sur $[2,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \geqslant 2 \ \varphi'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(1+x) + (1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{1}{x^2(1+x)} > 0\cdot$$

Ainsi, la fonction φ est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.
Il reste alors à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
Or, on a par propriété du logarithme :

$$\varphi(x) = \ln\Big(\frac{x+1}{x}\Big) - \frac{1}{x} = \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{x}\cdot$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \ln(1) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$,
d'où finalement par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Ceci prouve donc que la fonction φ est négative sur $[2,+\infty[$

• Méthode 2 : via l'inégalité de convexité bien connue :

$$\forall x \geqslant 0 \ \ \ln(1+x) \leqslant x.$$

O l'applique donc ici avec $\frac{1}{x} > 0$ puisque en particulier $x \geqslant 2$; ce qui donne finalement :

$$\forall x \geqslant 2, \ \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) \leqslant \frac{1}{x}, \quad \text{i.e} \quad \forall x \geqslant 2, \ \ln\Big(\frac{x+1}{x}\Big) \leqslant \frac{1}{x},$$

i.e

$$\boxed{\forall x \geqslant 2, \ \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.}$$

(c) Pour $p = 1$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n \geqslant \ln(n+2) - \ln(2)$, puis étudier la limite de (S_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $p = 1$ on a $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+1}{n}} = \dfrac{1}{n+1}$. Effectuons alors le calcul de (S_n) via un décalage d'indice :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. D'après la question précédente appliquée à x=k (ce qui est donc licite), on a :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k},$$

On somme cette inégalité pour tous les entiers $k = 2....n+1$, et on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}\cdot$$

Dans le membre de gauche, on reconnait alors un téléscopage tandis que le membre de droite est égale à S_n. d'où finalement :

$$\boxed{\ln(n+2) - \ln(2) \leqslant S_n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+2) - \ln(2) = +\infty$, on a en déduit par **théorème de comparaison** que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(n+p+2)\,u_{n+2} = (n+2)\,u_{n+1}$.

Comme $0 \leqslant n \leqslant n+p$ on a $\begin{pmatrix} n+p \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{(n+p)!}{n!p!}$

$$(n+p+2)\,u_{n+2} = \frac{n+p+2}{\frac{(n+p+2)!}{p!(n+2)!}} = \frac{p!\,(n+2)!\,(n+p+2)}{(n+p+1)!\,(n+p+2)}$$

Ce qui donne après simplification :

$$(n+p+2)\,u_{n+2} = \frac{p!\,(n+2)!}{(n+p+1)!}$$

Calculons d'autre part :

$$(n+2)\,u_{n+1} = \frac{n+2}{\frac{(n+p+1)!}{p!(n+1)!}} = \frac{p!\,(n+1)!\,(n+2)}{(n+p+1)!} = \frac{p!\,(n+2)!}{(n+p+1)!}$$

D'où le résultat attendu.

(b) En déduire par récurrence sur n que $S_n = \dfrac{1}{p-1}\Big(1-(n+p+1)\,u_{n+1}\Big)$.

Pa récurrence :

- *Initialisation* à $n=1$ on a $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} u_k = u_1 = 1/\begin{pmatrix} 1+p \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+p}$

  et $u_2 = 1/\begin{pmatrix} 2+p \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{(2+p)\,(1+p)}$ donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1}\,(1-(1+p+1)\,u_{1+1}) &= \frac{1}{p-1}\left(1-(p+2)\,\frac{2}{(2+p)\,(1+p)}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\,\frac{p-1}{1+p} = \frac{1}{1+p} = S_1 \end{aligned}$$

- *Hérédité* Soit $n \geqslant 1$ tel que $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+p+1)\,u_{n+1})$

  alors d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1}\,(1-(n+1+p+1)\,u_{n+2}) &= \frac{1}{p-1}\,(1-(n+p+2)\,u_{n+2}) \\ &= \frac{1}{p-1}\,(1-(n+2)\,u_{n+1}) \end{aligned}$$

  D'autre part

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1}\,(1-(n+p+1)\,u_{n+1}) + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1}\,(1-(n+p+1)\,u_{n+1} + (p-1)\,u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{p-1}\,(1-(n+2)\,u_{n+1}) \end{aligned}$$

  d'où l'égalité.

- *Conclusion* Donc pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1-(n+p+1)\,u_{n+1})$

9. (a) On pose $v_n = (n+p)\,u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule la différence

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n+p+1}{\binom{n+1+p}{n+1}} - \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} \\ &= \frac{(n+p+1)\,(n+1)!p!}{(n+p+1)!} - \frac{(n+p)\,n!p!}{(n+p)!} \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!}\left[n+1-(n+p)\right] \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!}\,(1-p) < 0 \end{aligned}$$

car le signe de ce produit est donné par le signe de $(1-p)$ (puisque les factorielles sont toujours positifs) et que p est supposé supérieur ou égal à 2. Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$

(b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

Il est clair que la suite (v_n) est positive car (u_n) est positive car l'inverse d'un coefficient binomial. Donc la suite (v_n) est minorée par 0 ; comme elle est décroissante, on sait par **théorème de convergence monotone**, qu'$\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell.}$
De l'inégalité $v_n \geqslant 0$ (car la suite est minorée par 0), on obtient par passage à la limite (licite car la suite est convergente) :

$$\boxed{\ell \geqslant 0.a}$$

(c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que (S_n) est convergente et exprimer sa limite en fonction de p et de ℓ.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on obtient alors (par argument de *suite extraite*) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ i.e alors

$$\lim_{n\to+\infty} (n+p+1)\,u_{n+1} = \ell.$$

D'où par passage à la limite dans l'expression de S_n (attention, on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$; p est donc une constante par rapport à n ! !) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1-\ell}{p-1}}$$

10. (a) Montrer que $v_n \sim n\,u_n$ et que $u_n \sim \dfrac{p!}{n^p}$ lorsque $n \to +\infty$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule la limite du quotient $\dfrac{v_n}{n\,u_n}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{n\,u_n} &= \frac{(n+p)\,u_n}{n\,u_n} \\ &= \frac{n+p}{n} \\ &= \frac{n\left(1+\frac{p}{n}\right)}{n} \\ &= 1+\frac{p}{n} \\ &\to 1 \text{ quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc, au voisinage de } +\infty,\ v_n \sim n\,u_n}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule la limite du quotient $\dfrac{u_n}{\frac{p!}{n^p}}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{\frac{p!}{n^p}} &= \frac{n!\,p!}{(n+p)!} \times \frac{n^p}{p!} \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \times n^p \\
&= \frac{n^p}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} \\
&= \frac{n^p}{n^p\big(1+\frac{p}{n}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{n}\big)} \\
&= \frac{1}{\big(1+\frac{p}{n}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{n}\big)} \\
&\to 1 \text{ quand } n \to +\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc, au voisinage de } +\infty,\ u_n \sim \frac{p!}{n^p}}$$

(b) En déduire la valeur de ℓ puis exprimer, en fonction de p seulement, la limite de (S_n).

D'après la question précédente, on a donc par règle de calcul des puissances :

$$n\,u_n \sim \frac{p!}{n^{p-1}}.$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p!}{n^{p-1}} = 0$ puisque p est supposé supérieur à 2 donc $p-1 \geqslant 1 > 0$. Ceci signifie donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 0$ (car deux suites équivalentes ont même limite) *i.e* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ i.e $\boxed{\ell = 0}$ par unicité de la limite. On en déduit alors immédiatement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{p-1}.}$

Problème

On étudie dans ce problème quelques aspects élémentaires de la génétique liés aux probabilités.

Dans tout le problème, on considère une population répartie entre mâles et femelles, portant chacun des chromosomes contenant eux-mêmes des gènes. Les chromosomes, et donc les gènes, vont par paires.
On s'intéresse à une paire de gènes particuliers pouvant présenter chacun seulement deux caractères, que l'on notera A et a. L'ordre n'intervenant pas, il y a donc trois paires de *génotypes* possibles, désignées par

$$AA, \qquad Aa \text{ (ou } aA\text{)}, \qquad aa$$

On suppose les sexes mâle et femelle équirépartis dans la population et les accouplements aléatoires. Dans une filiation, chaque enfant reçoit un gène de chaque géniteur (père et mère) avec équiprobabilité, pour constituer une paire, et les transmissions de gènes sont indépendantes.

Partie I : un exemple, la couleur des yeux

La couleur des yeux chez l'être humain est déterminée par un gène correspondant au modèle précédent. Seuls les individus possédant le génotype aa ont les yeux *clairs* (bleus, verts, etc.), tous les autres ont les yeux *foncés*.
On considère une famille qui attend la naissance d'un enfant.

11. (a) Les parents de la future maman ont les yeux foncés mais son frère a les yeux clairs. Quels sont les génotypes des parents ? En déduire la probabilité de F : « la future maman a les yeux foncés ».

Le frère est nécessairement de type aa donc chacun des parents possède au moins un a. Comme ils ont les yeux foncés, il sont donc tous les deux de type Aa.

L'évènement F est réalisé si et seulement si la future maman ne reçoit pas deux a de ses parents. Donc, par équiprobabilité,

$$\boxed{P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$$

(b) Sachant que la future maman a les yeux foncés, quelle est la probabilité de l'évènement G : « la future maman possède le génotype Aa » ?

Par équiprobabilité, on a de même $P(G) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Or $F \cap G = G$, donc :

$$\boxed{P_F(G) = \frac{P(F \cap G)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}}$$

(c) On sait aussi que le futur papa a les yeux clairs. Calculer la probabilité que le bébé ait les yeux clairs compte tenu des informations précédentes.

Puisque le papa transmet nécessairement un a, cet évènement B sera réalisé si et seulement si la maman est de type Aa (évènement G) et qu'elle transmet un a au bébé (évènement qu'on notera T). Par probabilités composées et équiprobabilité du tirage, on a donc :

$$\boxed{P_F(G \cap T) = P_F(G) \times P_{F \cap G}(T) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}}$$

12. On suppose que les futurs parents possèdent respectivement les génotypes Aa et aa. Ce couple a en tout n enfants, où $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces n enfants ait les yeux foncés ?

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons F_i l'évènement « l'enfant numéro i a les yeux foncés ». On cherche la probabilité de l'union $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) &= 1 - P\left(\bigcap \overline{F}_i\right) && \text{(par complémentaire)}\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{F_i}) && \text{(par indépendance)}\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\\
&= \boxed{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$

Partie II : principe de Hardy–Weinberg

On note u_0, $2v_0$, w_0 respectivement les probabilités qu'un individu de la population initiale possède les génotypes AA, Aa et aa (dans la population mâle comme dans la population femelle initiale). On a alors $u_0 + 2v_0 + w_0 = 1$. On pose de plus

$$p_0 = u_0 + v_0 \qquad \text{et} \qquad q_0 = v_0 + w_0.$$

13. Que représentent p_0 et q_0 ? Exprimer la proportion de gènes de type A par rapport aux gènes de type a.

Sélectionnons au hasard un gène d'un individu aléatoire de la population initiale. Alors p_0 est la probabilité que ce soit un gène de type A. En effet, puisque les trois génotypes (AA, Aa, aa) possibles pour l'individu forment un système complet, la probabilité de cet évènement, noté T, est :

$$\begin{aligned}
P(T) &= P(AA \cap T) + P(Aa \cap T) + P(aa \cap T)\\
&= P(AA)P_{AA}(T) + P(Aa)P_{Aa}(T) + P(aa)P_{aa}(T)\\
&= u_0 \cdot 1 + 2v_0 \cdot \frac{1}{2} + w_0 \cdot 0\\
&= \boxed{u_0 + v_0 = p_0}
\end{aligned}$$

Autrement dit, p_0 est la proportion de gènes de type A parmi tous les gènes de la population initiale. De même, $q_0 = 1 - p_0$ est la proportion de gènes de type a.

La proportion de gènes de type A par rapport aux gènes de type a est donc $\boxed{\frac{p_0}{q_0}.}$

14. (a) On choisit aléatoirement un mâle et une femelle dans la population initiale. Justifier qu'il y a 9 couples de génotypes possibles et déterminer leurs probabilités sous forme de tableau.

Il y a trois possibilités pour le mâle et trois possibilités pour la femelle, donc en tout $3 \times 3 = 9$ possibilités par choix successifs. En représentant le type du mâle en colonne et le type de la femelle en lignes, on obtient les probabilités suivantes par indépendance :

	AA	Aa	aa
AA	u_0^2	$2u_0v_0$	u_0w_0
Aa	$2u_0v_0$	$4v_0^2$	$2v_0w_0$
aa	u_0w_0	$2v_0w_0$	w_0^2

(b) Vérifier que les probabilités des génotypes AA, Aa et aa à la première génération (c'est-à-dire pour la population constituée des enfants) sont respectivement

$$u_1 = p_0^2, \qquad 2v_1 = 2p_0q_0, \qquad w_1 = q_0^2. \tag{1}$$

On choisit un enfant au hasard de la première génération et on note U_1 l'évènement « l'enfant est de type AA ». Puisque les 9 classes $C_1, \dots, C_9$ de la question précédente forment un système complet des couples de parents, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} u_1 = P(U_1) &= \sum_{i=1}^{9} P(C_i) P_{C_i}(U_1) \\ &= u_0^2 \times 1 + 2u_0v_0 \times \frac{1}{2} + 2u_0v_0 \times \frac{1}{2} + 4v_0^2 \times \frac{1}{4} + 0 \\ &= u_0^2 + 2u_0v_0 + v_0^2 \\ &= (u_0 + v_0)^2 \\ &= \boxed{p_0^2} \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient de même $w_1 = w_0^2 + 2w_0v_0 + v_0^2 = (w_0 + v_0)^2 = \boxed{q_0^2}$
Enfin, on sait que et $p_0 + q_0 = 1$ et de même $u_1 + 2v_1 + w_1 = 1$ puisque ce sont les probabilités d'un système complet de la première génération, donc :

$$\boxed{2v_1 = 1 - u_1 - w_1 = (p_0 + q_0)^2 - p_0^2 - q_0^2 = 2p_0q_0}$$

(c) Déterminer plus généralement les probabilités u_n, $2v_n$, w_n, des génotypes AA, Aa et aa respectivement, à la n-ième génération (c'est-à-dire après n filiations) et préciser, la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $p_n = u_n + v_n$ et $q_n = v_n + w_n$. En raisonnant comme ci-dessus,

$$u_{n+1} = p_n^2, \quad 2v_{n+1} = 2p_nq_n, \quad w_{n+1} = q_n^2$$

et donc $p_{n+1} = p_n^2 + p_nq_n = p_n(p_n + q_n) = p_n$ car $p_n + q_n = 1$. De même $q_{n+1} = q_n$.
On en déduit que les suites (p_n) et (q_n) sont constantes et donc, compte tenu des relations de récurrence ci-dessus,

$$\boxed{\text{les suites } (u_n), (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont donc constantes à partir du rang 1.}}$$

N.B. Ceci montre qu'on atteint approximativement la stabilité des génotypes dès la première génération, quelle que soit la répartition initiale.

Partie III : sélection

Dans cette partie, on fait l'hypothèse supplémentaire que les individus de type aa ne peuvent se reproduire ; on suppose donc un accouplement aléatoire seulement parmi les individus de type AA ou Aa. On désigne toujours par $u_0, 2v_0, w_0$ respectivement les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans les populations male et femelle initiales. On suppose $w_0 \neq 1$

15. (a) Quelle est la proportion de parents possibles dans la population totale initiale ?

Les parents potentiels sont les individus de type AA ou Aa. Leur proportion dans la population initiale est :

$$\boxed{u_0 + 2v_0 \;=\; 1 - w_0}$$

(b) Déterminer en fonction de u_0 et v_0 les proportions des génotypes AA et Aa parmi les parents.

Sachant qu'un individu est parent, la probabilité conditionnelle du type AA est : $\boxed{\dfrac{u_0}{1-w_0}}$

De même, la probabilité conditionnelle du type Aa est : $\boxed{\dfrac{2v_0}{1-w_0}}$

(c) On pose

$$p_0 = \frac{u_0 + v_0}{1 - w_0} \text{ et } q_0 = \frac{v_0}{1 - w_0}$$

Montrer qu'alors les proportions des trois génotypes dans la première génération (celle des enfants) sont encore données par les formules (1).

En reprenant la formule des probabilités totales avec ces nouvelles valeurs et en excluant les couples faisant apparaître un aa, on a bien :

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{u_0}{1-w_0}\right)^2 \cdot 1 + 2\left(\frac{u_0}{1-w_0}\frac{2v_0}{1-w_0}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{u_0}{1-w_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \\ &= \frac{u_0^2 + 2u_0v_0 + v_0^2}{(1-w_0)^2} \\ &= \boxed{\left(\frac{u_0+v_0}{1-w_0}\right)^2} = p_0^2. \end{aligned}$$

et de même : $w_1 = \left(\dfrac{2v_0}{1-w_0}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{4} + 0 = \dfrac{v_0^2}{(1-w_0)^2} = \boxed{\left(\dfrac{v_0}{1-w_0}\right)^2} = q_0^2.$

Enfin, comme précédemment, $2v_1 = 1 - u_1 - w_1 = (p_0+q_0)^2 - p_0^2 - q_0^2 = \boxed{2p_0q_0}$

(d) Peut-on avoir $w_1 = 1$?

Puisque $w_1 = q_0^2$ et $u_0 + 2v_0 + w_0 = 1$, on a les équivalences :

$$w_1 = 1 \iff v_0 = 1 - w_0 \iff v_0 + w_0 = 1 \iff u_0 + v_0 = 0.$$

Puisque u_0 et v_0 sont positifs, $w_1 = 1$ impliquerait $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$, et donc $w_0 = 1$. Ceci contredirait l'hypothèse de l'énoncé donc :

$$\boxed{\text{il est impossible que } w_1 = 1}$$

16. (a) On désigne toujours par $u_n, 2v_n, w_n$ les proportions des génotypes AA, Aa et aa respectivement à la n-ième génération et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \frac{u_n + v_n}{1 - w_n} \text{ et } q_n = \frac{v_n}{1 - w_n} \tag{2}$$

Calculer les probabilités $u_{n+1}, 2v_{n+1}, w_{n+1}$ pour un enfant de la $(n+1)$-ième génération d'être de génotype AA, Aa, aa respectivement.

Le même raisonnement qu'au (c) donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = p_n^2, \quad 2v_{n+1} = 2p_n q_n, \quad w_{n+1} = q_n^2}$$

(b) Montrer alors les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} = \frac{1}{1+q_n} \text{ et } q_{n+1} = \frac{q_n}{1+q_n} \tag{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{1 - w_{n+1}} \\ &= \frac{p_n^2 + p_n q_n}{1 - q_n^2} \\ &= \frac{p_n(p_n + q_n)}{1 - q_n^2} \\ &= \frac{p_n}{1 - q_n^2} \\ &= \frac{1 - q_n}{(1 - q_n)(1 + q_n)} \\ &= \boxed{\frac{1}{1 + q_n}} \end{aligned}$$

et on en déduit directement que : $\boxed{q_{n+1} = 1 - p_{n+1} = \dfrac{q_n}{1 + q_n}}$

(c) En déduire q_n puis w_n en fonction de n et de q_0. (On pourra commencer par déterminer $1/q_n$, quand il est défini.)
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$. Interprétation ?

Si $q_0 = 0$, alors il est clair par récurrence que (q_n) est constante et nulle. On supposera donc dans la suite que $q_0 > 0$ et on aura alors par récurrence aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n > 0$.
D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1 + q_n}{q_n} = \frac{1}{q_n} + 1,$$

c'est-à-dire que la suite $(1/q_n)$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $1/q_0$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{q_n = \frac{1}{\frac{1}{q_0} + n} = \frac{q_0}{1 + nq_0}}$$

On en déduit alors que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{w_n = (q_{n-1})^2 = \left(\frac{q_0}{1 + (n-1)q_0}\right)^2}$$

Puisque $q_0 \neq 0$, on obtient alors par opérations sur les limites : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0}$

Interprétation : au fur et à mesure des nouvelles générations, les individus de type aa tendent à disparaître, ce qui correspond bien à l'idée intuitive qu'on se fait d'une sélection. Cependant, la convergence est assez lente.