

Colles de mathématiques en E1A

Ensembles, applications, dénombrement

Semaine 9 : du 19 au 23 novembre

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Suites numériques (chapitre 3)

- Études de variation des suites numériques. Bornes, monotonie.

Méthodes essentielles :

- Montrer par récurrence qu'une suite est majorée/minorée/bornée.
- Étudier la monotonie d'une suite en comparant les termes consécutifs.

Parties d'un ensemble (chapitre 4)

- Parties d'un ensemble, ensemble des parties. Opérations dans l'ensemble des parties, règles de calcul.
- Dénombrement des parties d'un ensemble fini, combinaisons et lien avec les coefficients binomiaux.

Méthodes essentielles :

- Manipuler les inclusions et les règles de calcul sur les parties d'un ensemble.
- Effectuer un dénombrement élémentaire faisant intervenir des combinaisons (et simplifier les factorielles).

Applications entre ensembles (chapitre 5)

- Conditions pour qu'une fonction définisse une application. Composition de deux applications, associativité. Injectivité, surjectivité, traductions en termes d'équations ou d'antécédents, exemples.
- Bijektivité, traductions en termes d'équations ou d'antécédents, notation f^{-1} . Applications réciproques, formulations équivalentes, réciproque d'une composée de bijections.

Méthodes essentielles :

- Justifier qu'une application est bien définie d'un ensemble A vers un ensemble B .
- Montrer l'injectivité ou la surjectivité d'une application en vérifiant la définition.
- Résoudre une équation pour établir la bijectivité d'une application et expliciter sa réciproque.

Questions de cours suggérées

- Q1. Énoncer les règles de calcul pour l'union / l'intersection / la distributivité / les lois de Morgan.
- Q2. Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Q3. Simplifier l'union et l'intersection de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$.
- Q4. Définir *injection*, puis montrer que la composée de deux injections est une injection (exercice corrigé).
- Q5. Définir *surjection*, puis montrer que la composée de deux surjections est une surjection (exercice corrigé).
- Q6. Pour des applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$, à quelles conditions a-t-on f bijective et $g = f^{-1}$? Donner deux caractérisations en termes d'applications réciproques et de résolution d'équation.
- Q7. Énoncer le résultat sur la réciproque d'une composée de bijections, puis le démontrer par composition.

Prévisions pour la semaine suivante

- Dénombrement et applications. Principe bijectif, principe des choix successifs. Exemples importants : p -listes, p -arrangements, permutations, lien avec les coefficients binomiaux.
- Formalisme des évènements : univers, issue, évènements. Interprétation des opérations ensemblistes, évènements incompatibles, systèmes complets.
- Probabilités sur un univers fini. Définition, probabilité uniforme, première propriétés.