Colles de mathématiques en E1A

Récurrence, suites usuelles

Semaine 7 : du 5 au 9 novembre

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Récurrence (chapitre 2)

— Définition de la notation $\prod$ par analogie avec $\sum$. Convention pour les produits « vides ». Produit d'une suite constante, puissances entières. Règles de calcul. Définition des factorielles, relation de récurrence fondamentale : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = n! \times (n+1)$.

— Raisonnement par récurrence, énoncé général. Modèle de rédaction en quatre étapes à connaître par cœur. Exemples, calcul de somme. Variantes : récurrence à partir d'un certain rang, double, forte.

— Coefficients binomiaux, triangle de Pascal, formule du binôme de Newton.

Méthodes essentielles :

- Simplifier des quotients de factorielles.
- Rédiger parfaitement une démonstration par récurrence.
- Appliquer concrètement la formule du binôme de Newton à l'aide du triangle de Pascal.
- Calculer des sommes comportant des coefficients binomiaux en reconnaissant un binôme.

Suites numériques (chapitre 3)

— Généralités sur les suites. Formules explicites et relations de récurrence.

— Suites arithmétiques et suites géométriques, sommes de termes consécutifs. Suites arithmético-géométriques, méthode d'étude avec recherche de point fixe.

— Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, équation caractéristique, forme explicite dans le cas d'un discriminant positif ou nul. Exemple de la suite de Fibonacci.

— Études de variation des suites numériques. Bornes, monotonie.

Méthodes essentielles :

- Calculer des termes d'une suite à l'aide d'une relation de récurrence.
- Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique, puis déterminer sa forme explicite.
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique.
- Étudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2, exprimer son terme général sous forme explicite.

Questions de cours suggérées

Q1. Démontrer, à l'aide d'un télescopage, la formule pour la somme géométrique usuelle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Q2. Démontrer par récurrence que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Q3. Énoncer et démontrer la formule de Pascal, puis l'illustrer sur le triangle de Pascal.

Q4. Énoncer la formule du binôme de Newton puis l'appliquer à un développement concret en calculant les premières lignes du triangle de Pascal. Exemple : $(a-2)^5$.

Q5. Énoncer la définition de suite arithmétique (ou géométrique). Démontrer la forme explicite par récurrence.

Q6. Démontrer la formule pour les sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Q7. Énoncer la définition de suite arithmético-géométrique. Exposer la méthode d'étude sur un exemple.

Q8. Énoncer le théorème de structure des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Prévisions pour la semaine suivante

— Parties d'un ensemble, ensemble des parties.

— Opérations dans l'ensemble des parties, règles de calcul.

— Dénombrement des parties d'un ensemble fini et lien avec les coefficients binomiaux.