Colles de mathématiques en E1A

Sommes, produits, récurrence

Semaine 6 : du 15 au 19 octobre

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et pourraient intervenir dans les exercices.

Fonctions numériques (chapitre 1, partie III)

— Valeur absolue : règles de calcul, inégalité triangulaire, équivalence $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$, distance entre deux nombres, étude et graphe de la fonction $x \mapsto |x|$.

— Partie entière : définition, encadrement $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, étude et graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Méthodes essentielles :

- Simplifier une expression de la forme $|f(x)|$ en étudiant le signe de $f(x)$.
- Identifier une partie entière en se ramenant à un encadrement de la forme $n \leqslant x < n + 1$.

Récurrence (chapitre 2, parties I à IV)

— Lettres grecques : Sigma (Σ) désigne une Somme, et Pi (Π) désigne un Produit. Pas de confusion !

— Définition de la notation $\sum$, somme d'une suite finie de termes ou somme indexée par un ensemble fini. Convention pour les sommes « vides ». Rôle de l'indice de sommation (muet). Nombre de termes dans une somme, sommation d'une constante. Règles de calcul : linéarité et additivité.

— Changements d'indices : décalage (par exemple $j = i + 1$), retournement (par exemple $j = n + 1 - i$) et cas général d'une bijection entre deux ensembles finis. Simplifications télescopiques.

— Sommes usuelles à connaître par cœur, sans oublier les bornes de l'indice de sommation :

$$\sum_{k=a}^{b} 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

— Définition de la notation $\prod$ par analogie avec $\sum$. Convention pour les produits « vides ». Produit d'une suite constante, puissances entières. Règles de calcul. Définition des factorielles, relation de récurrence fondamentale : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = n! \times (n+1)$.

— Raisonnement par récurrence, énoncé général. Modèle de rédaction en quatre étapes à connaître par cœur. Exemples, calcul de somme. Variantes : récurrence à partir d'un certain rang, double, forte.

— Coefficients binomiaux, triangle de Pascal, formule du binôme de Newton.

Méthodes essentielles :

- Calculer une somme par linéarité à partir des formules des sommes usuelles.
- Utiliser l'additivité pour découper une somme, isoler son premier ou son dernier terme.
- Mettre en œuvre un changement d'indices (décalage ou retournement).
- Reconnaître et simplifier une somme télescopique.
- Simplifier des quotients de factorielles.
- Rédiger parfaitemet une démonstration par récurrence.
- Appliquer concrètement la formule du binôme de Newton à l'aide du triangle de Pascal.
- Calculer des sommes comportant des coefficients binomiaux en reconnaissant un binôme.

Questions de cours suggérées

Q1. Énoncer et démontrer l'inégalité trianglaire pour la valeur absolue.

Q2. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.

Q3. Démontrer par linéarité et décalage d'indice la simplification télescopqique :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

Q4. Justifier que $\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2 - k^2] = (n+1)^2$, puis en déduire par linéarité la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.

Q5. Démontrer à l'aide d'un télescopage la formule pour la somme géométrique usuelle :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Q6. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Q7. Énoncer et démontrer la formule de Pascal, puis l'illustrer sur le triangle de Pascal.

Q8. Énoncer la formule du binôme de Newton puis l'appliquer à un développement concret en calculant les premières lignes du triangle de Pascal. Exemple : $(a-2)^5$.

Prévisions pour la semaine 7

— Généralité sur les suites. Formules explicites et relations de récurrence. Suites arithmétiques et géométriques, formules de sommation. Suites arithmético-géométriques, méthode d'étude avec recherche de point fixe. Suite récurrentes linéaires d'ordre 2.