Colles de mathématiques en E1A

Fonctions usuelles et sommes

Semaine 5 : du 8 au 12 octobre

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et pourraient intervenir dans les exercices.

Fonctions numériques (chapitre 1, parties II et III)

— Théorème de la bijection. Application à la détermination d'ensembles images et aux équations.

— Fonctions usuelles : puissances entières, exponentielle, logarithme, puissances réelles. Règles de calcul, étude de variations et limites. Liens entre l'exponentielle, le logarithme et les puissances.

— Valeur absolue : règles de calcul, inégalité triangulaire, équivalence $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$, distance entre deux nombres, étude et graphe de la fonction $x \mapsto |x|$.

— Partie entière : définition, encadrement $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, étude et graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Méthodes essentielles :

- Étudier une fonction (domaine, parité, dérivabilité, variations, valeurs extrêmes).
- Appliquer le théorème de la bijection (avec la bonne rédaction).
- Comparer deux fonctions en étudiant les variations d'une fonction auxiliaire.
- Simplifier une expression à l'aide des règles de calcul des fonctions usuelles
- Écrire une puissance réelle sous forme exponentielle.
- Simplifier une expression de la forme $|f(x)|$ en étudiant le signe de $f(x)$.
- Identifier une partie entière en se ramenant à un encadrement de la forme $n \leqslant x < n+1$.

Sommes finies (chapitre 2, partie I)

— Lettres grecques : <u>S</u>igma (Σ) désigne une <u>S</u>omme, et <u>P</u>i (Π) désigne un <u>P</u>roduit. Pas de confusion !

— Définition de la notation $\sum$, somme d'une suite finie de termes ou somme indexée par un ensemble fini. Convention pour les sommes « vides ». Rôle de l'indice de sommation (muet). Nombre de termes dans une somme, sommation d'une constante. Règles de calcul : linéarité et additivité.

— Changements d'indices : décalage (par exemple $j = i + 1$), retournement (par exemple $j = n + 1 - i$) et cas général d'une bijection entre deux ensembles finis. Simplifications télescopiques.

— Sommes usuelles à connaître par cœur, sans oublier les bornes de l'indice de sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} 1, \qquad , \sum_{k=0}^{n} 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Méthodes essentielles :

- Calculer une somme par linéarité à partir des formules des sommes usuelles.
- Utiliser l'additivité pour découper une somme, isoler son premier ou son dernier terme.
- Reconnaître et simplifier une somme télescopique.
- Mettre en œuvre un changement d'indices.

Questions de cours suggérées

Q1. Rappeler la définition d'une bijection de A sur B, puis énoncer le théorème de la bijection.

Q2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.

Q3. Tracer l'allure du graphe des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x},\ x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ en précisant les limites.

Q4. Rappeler la définition de x^α pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et énoncer les règles de calcul des puissances réelles.

Q5. Énoncer et démontrer l'inégalité trianglaire pour la valeur absolue.

Q6. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.

Q7. Démontrer par décalage d'indice que : $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$.

Q8. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ par télescopage de $(k+1)^2 - k^2$, puis en déduire $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k$.

Prévisions pour la semaine 6

— Définition de la notation $\prod$ par analogie avec $\sum$. Convention pour les produits « vides ». Produit d'une suite constante, puissances entières. Règles de calcul. Définition des factorielles, relation de récurrence fondamentale : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = n! \times (n+1)$.

— Raisonnement par récurrence, énoncé général. Modèle de rédaction en quatre étapes à connaître par cœur. Exemples, calcul de somme. Variantes : récurrence à partir d'un certain rang, double, forte.

— Coefficients binomiaux, triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.