Colles de mathématiques en E1A

Étude de fonction, fonctions usuelles

Semaine 4 : du 1er au 5 octobre

1 Quelques mots sur la notation

La colle conduit à une note, comprise entre 0 et 20, qui évalue l'apprentissage et la compréhension du cours, ainsi que la faculté à l'utiliser dans des situations nouvelles. Cette note sera toujours :

— supérieure ou égale à 10 si le colleur juge que le cours est su de façon satisfaisante,

— inférieure à 10 si le colleur juge que le cours n'a pas été appris, ou alors de manière trop imprécise.

Remarque : la connaissance du cours est évaluée à partir de la question *et des exercices*.

2 Connaissances exigibles

2.1 Vocabulaire et démonstration

Reprise du programme précédent : `http://www.normalesup.org/~bureaux/2018/colles/semaine3.pdf`

2.2 Fonctions numériques

— Généralités sur les fonctions : ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image, antécédent, domaine de définition, ensemble image. Restriction d'une fonction. Composition de deux fonctions et étude du domaine de définition. Opérations algébriques sur les fonctions.

— Étude de fonctions : parité et imparité, exemple de $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Règles de calcul de dérivées pour les opérations algébriques, dérivation composée, exemple des compositions usuelles. Monotonie, stricte monotonie, lien avec la dérivée. Valeurs extrêmes : maximum, minimum, majorant, minorant.

— Théorème de la bijection. Application à la détermination d'ensembles images et aux équations.

— Fonctions usuelles : puissances entières, exponentielle, logarithme, puissances réelles. Règles de calcul, étude de variations et limites. Position des courbes de exp et ln par rapport à leur tangente en $(0, 1)$ ou $(1, 0)$.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Étudier les variations d'une fonction par calcul de dérivée et étude de signe, en déduire ses valeurs extrêmes.
- Appliquer le théorème de la bijection (en rédigeant correctement).
- Déterminer le domaine de définition d'une fonction.
- Montrer qu'une fonction est paire/impaire.
- Comparer deux fonctions en étudiant les variations d'une fonction auxiliaire.
- Simplifier une expression à l'aide des règles de calcul des fonctions usuelles
- Écrire une puissance réelle sous forme exponentielle.

3 Questions de cours suggérées

Q1. Exprimer l'implication $P \implies Q$ de 4 façons différentes : • en termes de condition nécessaire, • en termes de condition suffisante, • avec une disjonction, • par contraposition. Quelle est sa négation ?

Q2. Formule de dérivation de $g \circ f$ et application aux composées usuelles :

$$x \mapsto u(x)^n, \quad x \mapsto \frac{1}{u(x)}, \quad x \mapsto \sqrt{u(x)}, \quad x \mapsto e^{u(x)}, \quad x \mapsto \ln(u(x)).$$

Q3. Définir : fonction croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

Q4. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.

Q5. Énoncer les règles de calcul de l'exponentielle et du logarithme.

Q6. Tracer le graphe des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x},\ x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ en précisant les limites.

Q7. Rappeler la définition de x^α pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et énoncer les règles de calcul des puissances réelles.

Q8. Énoncer les six identités remarquables de degré 2 et 3 : pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 - b^3
\end{aligned}$$

Prévisions

— Valeur absolue : règles de calcul, inégalité triangulaire, équivalence $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$, distance entre deux nombres, étude et graphe de la fonction $x \mapsto |x|$.
  - Simplifier une expression de la forme $|f(x)|$ en étudiant le signe de $f(x)$.

— Partie entière, encadrement caractéristique, étude et graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
  - Identifier une partie entière en se ramenant à un encadrement de la forme $n \leqslant x < n + 1$.