Colles de mathématiques en E1A

Variables aléatoires, intégrales généralisées

Semaine 32 : du 9 au 14 juin

Connaissances exigibles

Intégrales généralisées

- Définition de l'intégrale sur $[a;+\infty[$ par passage à la limite.
- Convergence des intégrales usuelles $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ (Riemann) en fonction de λ et α.
- Propriétés et règles de calcul : linéarité, positivité, croissance.
- Théorèmes de comparaison et d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives.
- Relation de Chasles. Généralisation de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux.
- Définition des intégrales sur $]-\infty;b]$ et $]-\infty;+\infty[$. Extension des résultats précédents.
- Techniques de calcul : on commence toujours par le calcul sur un segment, pour lequel on dispose de tout un arsenal de techniques. Exemples de primitives à vue, intégration par parties, changement de variable. Application du changement $y=-x$ à l'intégrale des fonctions paires ou impaires sur $]-\infty;+\infty[$.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étude et calcul d'une intégrale généralisée : calcul sur un segment puis limite.

— Étude et calcul d'une intégrale généralisée à l'aide de la linéarité ou de la relation de Chasles.

— Calculer une intégrale généralisée par changement de variable ou intégration par parties.

— Justifier la convergence d'une intégrale à l'aide d'une comparaison ou d'un équivalent.

Variables aléatoires réelles à densité

- Définitions de *variable aléatoire à densité* et de *fonction de densité* à l'aide de la fonction de répartition. Interprétation de la densité. Caractérisation des densités. Pour tout intervalle I, expression de $\mathbb{P}([X \in I])$ à partir de F_X ou de f_X. Conséquence : les densités caractérisent la loi.
- Densités et fonctions de répartitions des lois usuelles à densité : lois uniformes sur les segments, lois exponentielles, loi normale centrée réduite. Propriétés de sa fonction de répartition normale Φ.
- Extension de l'espérance aux lois à densité, avec condition d'existence. Propriétés et règles de calcul. Espérance des lois usuelles.
- Théorème de transfert, application aux moments et à la variance (définition, König-Huygens, lois usuelles).
- Transfert affine $aX+b$ d'une variable à densité X. Application aux lois $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ à partir de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: définition, densité, fonction de répartition, espérance, variance.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Vérifier qu'une fonction est une densité, puis calculer la fonction de répartition associée.

— À partir de la fonction de répartition, vérifier qu'une variable admet une densité et en calculer une.

— Calculer $\mathbb{P}([X \in I])$ pour un intervalle quelconque à partir de la fonction de répartition ou d'une densité.

Questions de cours suggérées

Q1 : Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et calculer sa valeur.

Q2 : Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variable $u = e^t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}.$$

Q3 : Quelles sont les conditions sur la fonction de répartition pour qu'une variable aléatoire réelle X admette une densité ?

Q4 : Définir la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ à l'aide d'une densité, puis calculer sa fonction de répartition et son espérance.

Q5 : Définir la loi uniforme sur un segment $[a; b]$ à l'aide d'une densité (en le justifiant) puis calculer son espérance et sa variance.

Q6 : Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Quel est le lien entre les lois $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0; 1)$? Expliciter une densité de la loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ et exprimer sa fonction de répartition à l'aide de Φ.

Prévisions : variables aléatoires à densité