

Colles de mathématiques en E1A

Généralités sur les fonctions numériques

Semaine 3 : du 24 au 28 septembre

1 Quelques mots sur la notation

La colle conduit à une note, comprise entre 0 et 20, qui évalue l'apprentissage et la compréhension du cours, ainsi que la faculté à l'utiliser dans des situations nouvelles. Cette note sera toujours :

- supérieure ou égale à 10 si le colleur juge que le cours est su de façon satisfaisante,
- inférieure à 10 si le colleur juge que le cours n'a pas été appris, ou alors de manière trop imprécise.

Remarque : la connaissance du cours est évaluée à partir de la question *et des exercices*.

2 Connaissances exigibles

2.1 Vocabulaire et démonstration

- Vocabulaire ensembliste : appartenance, égalité de deux ensembles, inclusion, double-inclusion, ensembles finis, cardinal. Ensembles définis en compréhension, exemple des intervalles de \mathbb{R} et de \mathbb{Z} . Produit cartésien.
- Quantificateur universel et quantificateur existentiel. Négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence. Condition nécessaire, condition suffisante, réciproque d'une implication. Méthodes et modèles de démonstration pour chacun des quantificateurs et connecteurs logiques. Règles de négation. Raisonnement par l'absurde, preuve par contraposée d'une implication.
- Rappel des identités remarquables de degré 2 et de degré 3.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Formaliser un énoncé à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques.
- Rédiger une démonstration en utilisant correctement les mots-clés « soit, posons, supposons, etc. »
- Formuler la négation d'un énoncé quantifié.
- Mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

2.2 Fonctions numériques

- Généralités sur les fonctions : ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image, antécédent, domaine de définition, ensemble-image. Restriction d'une fonction. Composition de deux fonctions et étude du domaine de définition. Opérations algébriques sur les fonctions.
- Étude de fonctions : parité et imparité, exemple de $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Règles de calcul de dérivées pour les opérations algébriques, dérivation composée, exemple des compositions usuelles. Monotonie, stricte monotonie, lien avec la dérivée. Valeurs extrêmes : maximum, minimum, majorant, minorant.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Expliciter la composée de deux fonctions.
- Déterminer le domaine de définition d'une fonction définie par composition de fonctions usuelles.
- Démontrer qu'une fonction est paire/impaire.
- Calculer une dérivée mettant en jeu des opérations algébriques.
- Calculer une dérivée mettant en jeu des compositions de fonctions.
- Étudier les variations d'une fonction dérivable.

3 Questions de cours suggérées

Q1 : Énoncer les six identités remarquables de degré 2 et 3. Pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Q2 : Énoncer les règles de négation (pour tout, il existe, négation, conjonction, disjonction, implication).

Q3 : Exprimer une implication de 4 façons différentes : en termes de condition nécessaire, de condition suffisante, à l'aide d'une négation et d'un « ou », par contraposition.

Q4 : Définir la composée $g \circ f$ de deux fonctions et exprimer son domaine de définition.

Q5 : Définir l'ensemble-image d'une fonction, puis traduire la définition en termes d'équation.

Q6 : Dérivées des fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(x)$ et $u + v$, $\lambda u + \mu v$, uv , u/v .

Q7 : Formule de dérivation d'une composée $g \circ f$ et dérivées des compositions usuelles :

$$x \mapsto u(x)^n, \quad x \mapsto \frac{1}{u(x)}, \quad x \mapsto \sqrt{u(x)}, \quad x \mapsto e^{u(x)}, \quad x \mapsto \ln(u(x)).$$

Q8 : Définir : fonction croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.