Colles de mathématiques en E1A

Variables aléatoires discrètes, intégrales généralisées

Semaine 29 : du 20 au 24 mai

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Variables aléatoires discrètes

- Définition de variable aléatoire discrète, système complet d'évènement associé. Loi d'une variable aléatoire discrète. Cas des variables à valeurs entières, expression des $\mathbb{P}([X = n])$ à l'aide de la fonction de répartition.
- Lois discrètes usuelles et leurs situations-types : loi certaine, loi de Bernoulli, loi uniforme sur un intervalle d'entiers, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.
- Espérance, variable centrée. Propriétés et règles de calcul : linéarité, positivité, croissance. Condition de convergence absolue dans le cas d'une image infinie. Espérances des lois usuelles.
- Théorème de transfert. Application aux moments d'une variable aléatoire réelle discrète.
- Variance. Définition, écart-type, interprétation. Propriétés et règles de calcul. Formule de König-Huygens, calculs de variance des lois ususelles. Centrage et réduction d'une variable de variance non nulle.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Déterminer l'image et la loi d'une variable aléatoire discrète quelconque dans une situation concrète.

— Reconnaître une loi usuelle dans une situation concrète (équiprobabilité, schéma de Bernoulli, etc.).

— Justifier qu'une variable admet une espérance et la calculer.

— Calculer une espérance ou un moment à l'aide du théorème de transfert.

— Mettre en œuvre un calcul de variance avec la formule de König-Huygens.

Intégrales généralisées

- Définition de l'intégrale sur $[a; +\infty[$ par passage à la limite.
- Convergence des intégrales usuelles $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ (Riemann) en fonction de λ et α.
- Propriétés et règles de calcul : linéarité, positivité, croissance.
- Théorèmes de comparaison et d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives.
- Relation de Chasles. Généralisation de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux.
- Définition des intégrales sur $]-\infty; b]$ et $]-\infty; +\infty[$. Extension des résultats précédents.
- Techniques de calcul : on commence toujours par le calcul sur un segment, pour lequel on dispose de tout un arsenal de techniques. Exemples de primitives à vue, intégration par parties, changement de variable. Application du changement $y = -x$ à l'intégrale des fonctions paires ou impaires sur $]-\infty; +\infty[$.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étude et calcul d'une intégrale généralisée : calcul sur un segment puis limite.

— Étude et calcul d'une intégrale généralisée à l'aide de la linéarité ou de la relation de Chasles.

— Calculer une intégrale généralisée par changement de variable ou intégration par parties.

— Justifier la convergence d'une intégrale à l'aide d'une comparaison ou d'un équivalent.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Décrire deux lois discrètes usuelles : nom, paramètres, image, définition, espérance, variance et situation-type (on pourra s'aider du tableau).

$\boxed{\text{Q2}}$ Énoncer le théorème de transfert, puis calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Définir la variance, puis énoncer et démontrer la formule de König-Huygens.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrer que l'intégrale de Riemann d'exposant α converge si et seulement si $\alpha > 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variable $u = e^t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1}.$$

À suivre : variables aléatoires discrètes, intégrales généralisées