Colles de mathématiques en E1A

Intégration sur un segment

Semaine 28 : du 13 au 17 mai

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Intégration sur un segment

- Primitive d'une fonction sur un intervalle, « unicité » à une constante près. Primitives des fonctions usuelles et utilisation des dérivées des compositions usuelles. Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (admis). Définition de l'intégrale, interprétation graphique en termes « d'aire sous la courbe ».
- Techniques de calcul : intégration directe par primitivation « à vue », changement de variable et application aux fonctions paires ou impaires, formule d'intégration par parties.
- Relation de Chasles, extension de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux. Linéarité. Positivité, passage à l'intégrale dans les inégalités, encadrement d'intégrales (dont inégalité triangulaire).
- Méthode des rectangles, convergence des sommes de Riemann pour une fonction continue sur un segment.
- Étude d'une intégrale en fonction de ses bornes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Déterminer une « primitive à vue » pour calculer une intégrale.
— Appliquer un changement de variable (indiqué par l'énoncé) à une intégrale.
— Effectuer une intégration par parties.
— Calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux à l'aide de la relation de Chasles.
— Établir une inégalité entre deux intégrales par comparaison de fonctions, encadrer une intégrale.
— Identifier une somme de Riemann et déterminer sa limite.
— Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée d'une intégrale dépendant de ses bornes.

Variables aléatoires discrètes

- Définition de variable aléatoire discrète, système complet d'évènement associé. Loi d'une variable aléatoire discrète. Cas des variables à valeurs entières, expression des $\mathbb{P}([X = n])$ à l'aide de la fonction de répartition.
- Lois discrètes usuelles et leurs situations-types : loi certaine, loi de Bernoulli, loi uniforme sur un intervalle d'entiers, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.
- Espérance, variable centrée. Propriétés et règles de calcul : linéarité, positivité, croissance. Condition de convergence absolue dans le cas d'une image infinie. Espérances des lois usuelles.
- Théorème de transfert. Application aux moments d'une variable aléatoire réelle discrète.
- Variance. Définition, écart-type et interprétation. Propriétés et règles de calcul. Formule de König-Huygens, calculs de variance des lois ususelles. Centrage et réduction d'une variable de variance non nulle.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Déterminer l'image et la loi d'une variable aléatoire discrète quelconque dans une situation concrète.
— Reconnaître une loi usuelle dans une situation concrète (équiprobabilité, schéma de Bernoulli, etc.).
— Justifier qu'une variable admet une espérance et la calculer.
— Calculer une espérance ou un moment à l'aide du théorème de transfert.
— Mettre en œuvre un calcul de variance avec la formule de König-Huygens.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Énoncer le théorème de changement de variable puis l'appliquer (en posant $y = \sqrt{x}$) au calcul de :

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx.$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Énoncer le théorème d'intégration par parties et l'appliquer au calcul de

$$\int_2^3 x \ln(x)\, dx.$$

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer que la suite (I_n) définie ci-dessous est décroissante et tend vers 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^x \, dx.$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Énoncer le théorème des sommes de Riemann sur $[0;1]$ et l'appliquer au calcul de

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Soient a, b deux fonctions dérivables sur I, à valeurs dans un intervalle J, et f continue sur J. La fonction Φ définie ci-dessous est-elle dérivable sur I ? Quelle est sa dérivée ? Démontrer vos réponses.

$$\Phi : x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Décrire deux lois discrètes usuelles : nom, paramètres, image, définition, espérance, variance et situation-type (on pourra s'aider du tableau).

$\boxed{\text{Q7}}$ Énoncer le théorème de transfert, puis calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Définir la variance, puis énoncer et démontrer la formule de König-Huygens.

À suivre : variables aléatoires discrètes, intégrales généralisées