Colles de mathématiques en E1A

Intégration sur un segment

Semaine 26 : du 15 au 19 avril

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Variables aléatoires

- Définition d'une variable aléatoire réelle.
- Évènements $[X \in I]$, où I est un intervalle de type quelconque.
- Système complet associé à une variable aléatoire.
- Application à la loi des variables aléatoires dont l'image est finie.
- Fonction de répartition. Propriétés caractéristiques.
- Caractérisation de la loi par la fonction de répartition.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Déterminer l'image et la loi d'une variable aléatoire dans une situtation concrète finie (lancer de dés, tirages dans urne, etc.)

— Représenter graphiquement la fonction de répartition d'une variable aléatoire X tel que $X(\Omega)$ est fini.

— Pour tout intervalle I, calculer $P([X \in I])$ à l'aide de la fonction de répartition.

Intégration sur un segment

- Primitive d'une fonction sur un intervalle, « unicité » à une constante près. Primitives des fonctions usuelles et utilisation des dérivées des compositions usuelles. Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (admis). Définition de l'intégrale, interprétation graphique en termes « d'aire sous la courbe ».
- Techniques de calcul : intégration directe par primitivation « à vue », changement de variable et application aux fonctions paires ou impaires, formule d'intégration par parties.
- Relation de Chasles, extension de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux. Linéarité. Positivité, passage à l'intégrale dans les inégalités, encadrement d'intégrales (dont inégalité triangulaire).
- Méthode des rectangles, convergence des sommes de Riemann pour une fonction continue sur un segment.
- Étude d'une intégrale en fonction de ses bornes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Déterminer une « primitive à vue » pour calculer une intégrale.

— Appliquer un changement de variable (indiqué par l'énoncé) à une intégrale.

— Effectuer une intégration par parties.

— Calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux à l'aide de la relation de Chasles.

— Établir une inégalité entre deux intégrales par comparaison de fonctions, encadrer une intégrale.

— Identifier une somme de Riemann et déterminer sa limite.

— Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée d'une intégrale dépendant de ses bornes.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle ? Si I est un intervalle, comme est défini l'évènement $[X \in I]$? Qu'est-ce que l'image d'une variable aléatoire (formellement et informellement) ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X ? Quelles sont ses quatre propriétés caractéristiques ?

$\boxed{\text{Q3}}$ En quoi la fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X caractérise-t-elle sa loi ? Si a et b sont des réels, comment exprimer les probabilités $P([X \leqslant b])$, $P([X > a])$ et $P([a < X \leqslant b])$ à l'aide de F ? et $P([X < b])$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Énoncer le théorème de changement de variable puis l'appliquer (en posant $y = \sqrt{x}$) au calcul de :

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, dx.$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Énoncer le théorème d'intégration par parties et l'appliquer au calcul de

$$\int_2^3 x \ln(x) \, dx.$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrer que la suite (I_n) définie ci-dessous est décroissante et tend vers 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^x \, dx.$$

$\boxed{\text{Q7}}$ Énoncer le théorème des sommes de Riemann sur $[0;1]$ et l'appliquer au calcul de

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$

$\boxed{\text{Q8}}$ Soient a, b deux fonctions dérivables sur I, à valeurs dans un intervalle J, et f continue sur J. La fonction Φ définie ci-dessous est-elle dérivable sur I ? Quelle est sa dérivée ? Démontrer vos réponses.

$$\Phi : x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) \, dt$$