# Colles de mathématiques en E1A

Variables aléatoires réelles

Semaine 25 : du 8 au 12 avril

## Nouvelles connaissances exigibles

*Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.*

### Théorie générale des probabilités

- Rappel du formalisme élémentaire des probabilités.
- Union et intersection d'une suite infinie d'évènements.
- Notion de tribu sur un ensemble.
- Système complet infini.
- Probabilité sur un ensemble muni d'une tribu, $\sigma$-additivité.
- Conséquences de la $\sigma$-additivité : probabilités totales, complémentaires, formules du crible, croissance.
- Continuité croissante et décroissante des probabilités. Suites croissantes ou décroissantes d'évènements.
- Évènement négligeable (quasi-impossible), évènement presque sûr (quasi-certain).
- Indépendance d'une suite infinie d'évènements. Schémas de Bernoulli.
- Conditionnement par un évènement.

*Méthodes essentielles à savoir appliquer :*

— Généraliser les méthodes du chapitre sur les univers finis (formule des probabilités totales, probabilités composées, Bayes, etc.)

— Formaliser un évènement à l'aide d'unions et d'intersections. Interpréter une union ou une intersection.

— Calculer la probabilité d'une union ou intersection infinie d'évènements par continuité croissante ou décroissante (passage à la limite).

### Variables aléatoires

- Définition d'une variable aléatoire réelle.
- Évènements $[X \in I]$, où $I$ est un intervalle de type quelconque.
- Système complet associé à une variable aléatoire.
- Application à la loi des variables aléatoires dont l'image est finie.
- Fonction de répartition. Propriétés caractéristiques.
- Caractérisation de la loi par la fonction de répartition.

*Méthodes essentielles à savoir appliquer :*

— Déterminer l'image et la loi d'une variable aléatoire dans une situtation concrète finie (lancer de dés, tirages dans urne, etc.)

— Représenter graphiquement la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ tel que $X(\Omega)$ est fini.

— Pour tout intervalle $I$, calculer $P([X \in I])$ à l'aide de la fonction de répartition.

## Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Comment interpréter les évènements suivants ?

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n, \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n, \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k, \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble $\Omega$ quelconque. Qu'est-ce qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ ? Est-il vrai que pour tous $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ? (démontrer votre réponse)

$\boxed{\text{Q3}}$ Rappel des semaines 11 et 12. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ sont des évènements mutuellement indépendants et de même probabilité $p \in [0; 1]$, quelle est la probabilité qu'au moins un des $(A_i)$ se réalise ? (le démontrer)

$\boxed{\text{Q4}}$ Peut-on exprimer la probabilité d'une intersection ou d'une union infinie à l'aide d'une limite ? Énoncer les formules dans le cas général ainsi que les simplifications dans le cas d'une suite croissante ou décroissante d'évènements.

$\boxed{\text{Q5}}$ Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle ? Si $I$ est un intervalle, comme se définit l'évènement $[X \in I]$ ? Qu'est-ce que l'image d'une variable aléatoire (formellement et informellement) ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ ? Quelles sont ses quatre propriétés caractéristiques ?

$\boxed{\text{Q7}}$ En quoi la fonction de répartition $F$ d'une variable aléatoire réelle $X$ caractérise-t-elle sa loi ? Si $a$ et $b$ sont des réels, comment exprimer les probabilités $P([X \leqslant b])$, $P([X > a])$ et $P([a < X \leqslant b])$ à l'aide de $F$ ? et $P([X < b])$ ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Quelle condition sur une fonction $f$ garantit l'existence d'une primitive sur un intervalle $I$ ? Dans ce cas, qu'est-ce que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque $(a, b) \in I^2$ ? Justifier que, pour tout $x_0 \in I$ et toute primitive $F$,

$$\forall x \in I, \quad F(x) \;=\; F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

## Semaine 26 : intégration sur un segment