Colles de mathématiques en E1A

Séries, théorie générale des probabilités

Semaine 23 : du 25 au 29 mars

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Séries

- Série, terme général, sommes partielles. Séries télescopique.
- Séries usuelles : géométriques, Riemann, exponentielles.
- Convergence, divergence, somme d'une série. Linéarité.
- Divergence grossière.
- Convergence des séries à termes positifs : caractérisation, critères de comparaison et d'équivalence.
- Convergence absolue.
- Séries géométriques dérivées (ordre 1 et 2).

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Exprimer les sommes partielles à partir du terme général, ou le terme général à partir des sommes partielles.
— Étudier la convergence d'une série à partir des sommes partielles.
— Reconnaître une série usuelle ou s'y ramener par linéarité et changement d'indice.
— Déterminer la nature d'une série usuelle, et éventuellement la valeur de sa somme.
— Reconnaître une série télescopique, déterminer sa nature, calculer sa somme (lorsqu'elle existe).
— Déterminer la nature d'une série à termes positifs par comparaison ou équivalent.

Théorie générale des probabilités

- Rappel du formalisme élémentaire des probabilités.
- Union et intersection d'une suite infinie d'évènements.
- Notion de tribu sur un ensemble.
- Système complet infini.
- Probabilité sur un ensemble muni d'une tribu, σ-additivité.
- Conséquences de la σ-additivité : probabilités totales, complémentaires, formules du crible, croissance.
- Continuité croissante et décroissante des probabilités. Suites croissantes ou décroissantes d'évènements.
- Évènement négligeable (quasi-impossible), évènement presque sûr (quasi-certain).
- Indépendance d'une suite infinie d'évènements.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Méthodes du chapitre sur les univers finis (probabilités totales, probabilités composées, Bayes, etc.)
— Formaliser un évènement à l'aide d'unions et d'intersections. Interpréter une union ou une intersection.
— Calculer la probabilité d'une union ou intersection infinie d'évènements par continuité croissante ou décroissante (passage à la limite).

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Quelle est la définition de *série convergente* ? de la *somme* d'une série convergente ?

$\boxed{\text{Q2}}$ La série harmonique (Riemann d'exposant $\alpha = 1$) est-elle convergente ? Démontrer votre réponse.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quelles sont les trois familles de séries usuelles ? Préciser les conditions de convergence et les formules éventuelles pour la somme.

$\boxed{\text{Q4}}$ Déterminer la nature de deux des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{n}{\ln(n)}, \qquad \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2 \ln(n)}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \ln(n)}, \qquad \sum_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^3 + 2}.$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit $q \in \mathbb{R}$. À quelle condition les séries $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont-elles convergentes ?

Quelle est alors leur somme ? Appliquer ceci au calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, n^2}{3^n}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Comment interpréter les évènements suivants ?

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n, \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n, \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k, \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω quelconque. Qu'est-ce qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$? Est-il vrai que pour tous $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$? (démontrer votre réponse)

$\boxed{\text{Q8}}$ Rappel des semaines 11 et 12. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ sont des évènements mutuellement indépendants et de même probabilité $p \in [0; 1]$, quelle est la probabilité qu'au moins un des (A_i) se réalise ? (le démontrer)

Semaine 24 : théorie générale des probabilités, variables aléatoires