Colles de mathématiques en E1A

Dérivabilité, séries

Semaine 22 : du 18 au 22 mars

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Dérivabilité

- Taux d'accroissement, dérivabilité, dérivabilité à droite/gauche, tangente, demi-tangentes.
- Calcul de dérivées par opérations. Notation $o(1)$, développements limités à l'ordre 0 et à l'ordre 1. Dérivation d'une composée de fonctions dérivables, de la réciproque d'une bijection dérivable.
- Fonctions dérivables sur un intervalle, condition nécessaire d'extremum local sur un intervalle *ouvert*, études de variations, inégalité des accroissements finis avec application aux suites récurrentes d'ordre 1.
- Fonctions n fois dérivables, classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$, stabilité par opérations et compositions.
- Convexité et concavité, définition générale puis critères pratiques pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$. Points d'inflexion. Inégalités de convexité : position par rapport aux tangentes, par rapport aux cordes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point à l'aide du taux d'accroissement.
— Calculer une limite en identifiant un taux d'accroissement ou avec un développement limité à l'orde 1.
— Calculer la dérivée d'une fonction obtenue par opérations ou compositions.
— Étudier la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux (disjonction de cas).
— (Rappel) Étudier les variations et les extremums d'une fonction dérivable.
— Appliquer l'inégalité des accroissements finis pour encadrer une expression de la forme $f(b) - f(a)$.
— Étudier la convexité/concavité d'une fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ et déterminer ses points d'inflexion.

Séries

- Série, terme général, sommes partielles. Séries télescopique.
- Séries usuelles : géométriques, Riemann, exponentielles.
- Convergence, divergence, somme d'une série. Linéarité.
- Divergence grossière.
- Convergence des séries à termes positifs : caractérisation, critères de comparaison et d'équivalence.
- Convergence absolue.
- Séries géométriques dérivées (ordre 1 et 2).

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Exprimer les sommes partielles à partir du terme général, ou le terme général à partir des sommes partielles.
— Étudier la convergence d'une série à partir des sommes partielles.
— Reconnaître une série usuelle ou s'y ramener par linéarité et changement d'indice.
— Déterminer la nature d'une série usuelle, et éventuellement la valeur de sa somme.
— Reconnaître une série télescopique, déterminer sa nature, calculer sa somme (lorsqu'elle existe).
— Déterminer la nature d'une série à termes positifs par comparaison ou équivalent.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Énoncer l'inégalité des accroissements finis (avec et sans valeurs absolues).

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit f dérivable sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et un réel $K \in [0;1[$ tel que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant K$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant K^n\,|u_0 - \alpha|$. En déduire la convergence de (u_n).

$\boxed{\text{Q3}}$ Énoncer la définition de « fonction convexe sur un intervalle » en l'illustrant par un croquis, puis démontrer que $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle est la définition de *série convergente* ? de la *somme* d'une série convergente ?

$\boxed{\text{Q5}}$ La série harmonique (Riemann d'exposant $\alpha = 1$) est-elle convergente ? Démontrer votre réponse.

$\boxed{\text{Q6}}$ Quelles sont les trois familles de séries usuelles ? Préciser les conditions de convergence et les formules éventuelles pour la somme.

$\boxed{\text{Q7}}$ Déterminer la nature de deux des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{n}{\ln(n)}, \qquad \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2\ln(n)}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\ln(n)}, \qquad \sum_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^3+2}.$$

Semaine 23 : convergence des séries, théorie générale des probabilités