Colles de mathématiques en E1A

Dérivabilité

Semaine 21 : du 11 au 15 mars

Nouvelles connaissances exigibles

Toutes les notions des programmes précédents restent exigibles et peuvent intervenir dans les exercices.

Dérivabilité

- Taux d'accroissement, dérivabilité, dérivabilité à droite/gauche, tangente, demi-tangentes.
- Calcul de dérivées par opérations. Notation $o(1)$, développements limités à l'ordre 0 et à l'ordre 1. Dérivation d'une composée de fonctions dérivables, de la réciproque d'une bijection dérivable.
- Fonctions dérivables sur un intervalle, condition nécessaire d'extremum local sur un intervalle *ouvert*, études de variations, inégalité des accroissements finis avec application aux suites récurrentes d'ordre 1.
- Fonctions n fois dérivables, classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$, stabilité par opérations et compositions.
- Convexité et concavité, définition générale puis critères pratiques pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$. Points d'inflexion. Inégalités de convexité : position par rapport aux tangentes, par rapport aux cordes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point à l'aide du taux d'accroissement.
— Calculer une limite en identifiant un taux d'accroissement ou avec un développement limité à l'orde 1.
— Calculer la dérivée d'une fonction obtenue par opérations ou compositions.
— Étudier la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux (disjonction de cas).
— (Rappel) Étudier les variations et les extremums d'une fonction dérivable.
— Appliquer l'inégalité des accroissements finis pour encadrer une expression de la forme $f(b) - f(a)$.
— Étudier la convexité/concavité d'une fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ et déterminer ses points d'inflexion.

Questions de cours suggérées

$\boxed{\text{Q1}}$ Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

$\boxed{\text{Q2}}$ Exprimer le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction f dérivable en un réel x_0. En déduire les développements limités à l'ordre 1 de $\ln(x)$ en $x_0 = 1$, et de e^x et $(1+x)^\alpha$ en $x_0 = 0$.

$\boxed{\text{Q3}}$ (Rappel) Formule générale de dérivation d'une composée, dérivées des compositions usuelles :

$$x \mapsto u(x)^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad x \mapsto \frac{1}{u(x)}, \quad x \mapsto \sqrt{u(x)}, \quad x \mapsto e^{u(x)}, \quad x \mapsto \ln(u(x)), \quad x \mapsto u(x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Énoncer l'inégalité des accroissements finis (avec et sans valeurs absolues).

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit f dérivable sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et un réel $K \in [0; 1[$ tel que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant K$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant K^n\, |u_0 - \alpha|$. En déduire la convergence de (u_n).

$\boxed{\text{Q6}}$ Énoncer la définition de « fonction convexe sur un intervalle » en l'illustrant par un croquis, puis démontrer que $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Prévisions pour la semaine 22 : dérivabilité, convergence des séries